

## **4. MODELLI DI ATTIVITA' MANUALI**

Le unità didattiche:

4.1 Rulli, attrito, puleggia e rotellina

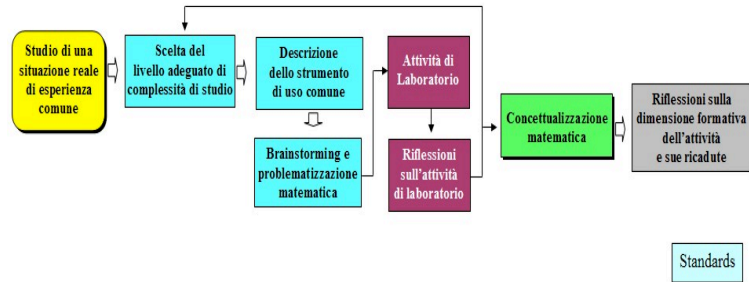
4.2 Il recinto

4.3 Lo spessore

## 4.1 Rulli, attrito, puleggia e rotellina

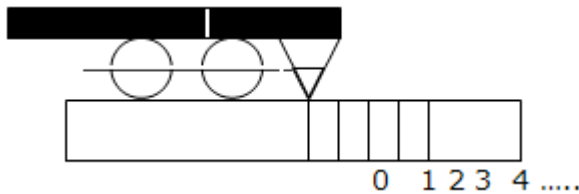
*Nell'unità si pone in relazione la matematica con semplici apparecchiature e con esperienze fisiche al fine di trovare quei punti di appoggio sui quali costruire gli oggetti matematici (step stone). Sono presentate tre esperienze che esemplificano una delle più semplici funzioni che si possono trovare: quella di raddoppiare. Si percorre, così, quasi per caso, il cammino*

*evolutivo dell'algebra, si 'mostrano' sue possibili applicazioni, si riconduce l'esperienza a concetti fisici come l'attrito, si esemplifica cosa vuol dire formula, si assume la dimensione operativa di funzione, si pongono le basi per sviluppare il concetto di equazione di primo grado.*



### L'esperienza dei rulli

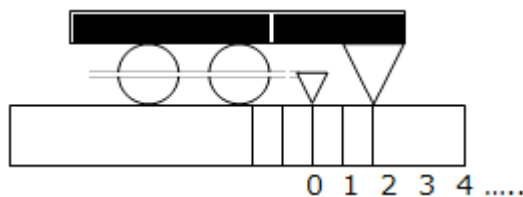
I rulli non sono altro che un paio di cilindretti di legno tenuti assieme da una assicella alla quale è associato un indice. La piattaforma è semplicemente una tavoletta di legno che viene appoggiata sui rulli; anche la piattaforma è munita di un indice. I rulli rotolano sul tavolo sul quale sono segnati in centimetri le lunghezze. All'inizio i due indici sono portati entrambi a coincidere con la tacca della base che indica lo zero (vedi figura)



Chiunque abbia mosso un oggetto pesante, dopo averlo poggiato sui rulli, sa che di continuo deve prendere i rulli che rimangono liberi dietro e portarli davanti ad esso. Difatti l'oggetto, continuamente sopravanza i rulli, cioè procede più velocemente dei rulli.

Problema: Di quanto più velocemente ?

Di regola nessuno lo sa (o perlomeno quando ho fatto la domanda al gruppo nessuno lo sapeva). Tuttavia ciò può essere trovato rapidamente osservando ciò che accade quando la piattaforma è spinta in avanti, come nella figura



Per andare oltre l'impressione che ci limitiamo così solo al caso  $r=2$  e  $p=4$  cerchiamo di fare una previsione sulla legge generale, quindi dall'osservazione dinamica del moto fissiamo alcuni momenti in una tabellina:

Distanza percorsa dai rulli	0	1	2	3	....
Distanza percorsa dalla piattaforma	0	2	4	6	....

Si stimolano gli studenti a iniziare con congetture che non pretendono di essere né definitive né rigorose ma soltanto provvisorie, "plausibili" per il problema considerato.

Viene pensata una congettura che dovrà essere, nella testa di chi sta di fronte al problema, un "mattoncino" necessario per costruire la soluzione, ci sono molti "pro" a favore della sua plausibilità, ma ci sono anche alcuni, forse non banali, "contro".

E' sufficiente pochissimo tempo per concludere l'esperimento e per ricavare la legge.

Si trova che nel periodo di tempo che i rulli percorrono 1 cm la piattaforma si è spostata di 2 cm. Quando i rulli hanno percorso 2 cm la piattaforma ne ha percorsi 4 e così via.

A questo punto si deve portare la classe a riflettere su quanto fatto e sulle conclusioni alle quali l'esperimento ha portato.

Abbiamo cominciato con il far scrivere con parole proprie il risultato e con l'apporto di tutti si è affinata la frase fino ad arrivare a scrivere alla lavagna "il numero di centimetri che sono percorsi dalla piattaforma è doppio di quello percorso dai rulli"<sup>27</sup>.

Il secondo passo è quello di stimolare gli alunni verso una abbreviazione della frase (*Questa è una frase un po' lunghetta, non sapreste suggerire qualche abbreviazione?*) modificando via via la frase alla lavagna con i loro suggerimenti fino ad arrivare a condensarla nell'equazione " $p = 2r$ " nella quale  $p$  è quanto rimane della frase "il numero di cm percorsi dalla piattaforma" e  $r$  rappresenta "il numero di cm percorsi dai rulli". Importante, far notare che  $r$  assume valori diversi (0 -1 - 2- 3...), variabili; ma anche  $p$  assume valori diversi ma i valori di  $p$  dipendono dalla posizione di  $r$ , variabile dipendente. Possiamo quindi introdurre questi due concetti importanti senza il ricorso all'espressione verbale ma attraverso l'esperienza; non dobbiamo insistere sulla precisa definizione verbale di questi concetti. Molti dei nostri ragazzi non imparano molto dalle definizioni verbali ma dall'uso effettivo delle cose.

Tutto il processo viene documentato sul quaderno personale dell'allievo, dallo schizzo dell'attrezzatura alle varie frasi fino alla formula.

Questo può essere un primo incontro con l'algebra come espediente per risparmiarsi una lunga relazione scritta e per ricordare alcune nozioni apprese.

Occasionalmente nel giro di pochi minuti abbiamo ripercorso con i nostri alunni il cammino evolutivo dell'algebra che in origine per compiersi aveva avuto bisogno

**Riferimento agli Standard. Area scientifica. Standard G** Livello 3. *Usa notazioni specifiche e formalismi, applica concetti matematici, procedure e strumenti operativi per risolvere problemi.* **Standard H** Livello 3. *Utilizza in modo ordinato e strutturato conoscenze relative ai sistemi numerici e di misura per stimare importi, lunghezze, distanza, tempi ed operare con essi. Conosce il significato operativo di alcune variabili geometriche e fisiche e le utilizza per analizzare problemi relativi al movimento e alle trasformazioni energetiche.*

<sup>27</sup> In questa occasione si può fissare l'attenzione sulle unità di misura e su tutto ciò che serve per descrivere in modo inequivocabile quanto osservato.

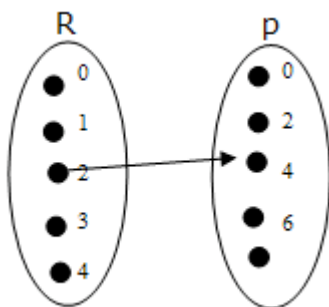
di più secoli.<sup>28</sup> Stiamo usando l'algebra come un mezzo conveniente per fissare quanto abbiamo intuito e per comunicarlo a terze persone.

*(dobbiamo stare attenti a non anticipare gli studenti con risposte poiché rischiamo di vanificare tutto il lavoro).*

E' questo anche un mezzo efficace per presentare l'algebra, per mostrare loro le possibili applicazioni e per dare un'esemplificazione di quel che significa una formula.

L'esperienza della piattaforma a rulli permette di porre le basi per il concetto di funzione.

Se le condizioni di uso dell'attrezzatura sono quelle stabilite (alla piattaforma non è concesso di slittare, né di essere sollevata dai rulli o poggiata su di essi in una posizione differente da quella iniziale), se dico agli allievi  $r = 5$  loro mi rispondono  $p = 10$  e così via.



**Riferimenti agli Standard Area scientifica. Standard H Livello 4.**

*Generalizza strumenti matematici per affrontare problemi complessi di tipo personale, sociale, ambientale, tecnologico. Standard G Livello 4. Classifica elementi valutando e scegliendo il criterio più efficace. Affronta problemi di contabilità con un certo grado di complessità. Usa diverse forme e rappresentazionali. Sa coordinare, intergere le proprie mansioni con quelle di altri.*

Sintetizzando si completa il grafo

evidenziando in questo modo il *collegamento* tra dominio "r" e condominio "p": se scelgo r risulta determinato il valore di p.

Introducendo il linguaggio delle funzioni posso dire  $p = f(r)$ .

Questo secondo aspetto dell'uso dell'apparecchiatura eventualmente merita uno sviluppo e una descrizione più dettagliata e completa con la descrizione di altre semplici attrezzature e delle implicazioni matematiche che se ne possono trarre.

In questa occasione vale la pena di riflettere sull'importanza di scegliere i problemi con l'occhio molto attento al gruppo ai quali si propongono, se sono troppo facile non c'è nessuno stimolo e quindi non servono; se sono troppo difficili sono frustranti e possono essere negativi ricalcando nei ragazzi la sensazione di inadeguatezza di pronte al compito

**L'attrito**

L'attività, che estende l'esperienza precedente a riflessioni sul mondo fisico, conduce a pensare almeno a due questioni (concetti) che assumono importanza nel quotidiano:

- l'attrito
- la velocità periferica e angolare (ruota...).

L'argomento che a prima vista accompagna in modo più stretto qualsiasi azione del quotidiano e sul quale si riflette in genere molto poco sembra essere "l'attrito". il "camminare", il "fermarsi di persone o cose", il "prendere e trattenere in mano un oggetto", la sbucciatura di un ginocchio causata da una caduta dalla bici..... sono interpretabili (e risultano possibili) se si ammette la

<sup>28</sup> *Dalla forma esclusivamente verbale, "algebra retorica", attraverso "l'algebra abbreviata" alla forma moderna dell'algebra simbolica"*

presenza di una particolare forma di "forza" che si contrappone ad altre forze "cugine". per risonanza tra concetti si può arrivare a discutere e lavorare più estesamente o approfonditamente sul concetto di forza che potrà essere meglio inquadrato/definito per differenza con il concetto di "energia" con il quale viene comunemente confuso. il percorso riguarderà la dispersione di energia (cinetica...) in energia termica a causa di attriti (conservazione dell'energia). Il lavoro prevede la riflessione sul concetto di "funzione", in quanto si può giungere alla scoperta di alcune "formule" che danno conto della variazione della forza necessaria allo spostamento in funzione della superficie di appoggio o del peso e..... e potrà svilupparsi su una sequenza di questo tipo:

- osservo/rifletto, faccio congetture, mi-vi descrivo:
- *in quali situazioni ho potuto osservare una macchina simile a questa?*
- *come mai vengono usati rulli per poter spostare più facilmente un oggetto pesante?*
- *come potrei misurare la differenza di "facilità" di spostamento di un oggetto quando, piuttosto che spingerlo così com'è, uso i rulli per spostarlo?* (discussione, congetture condivise, verifica, riflessione: si ricerca l'u.m. per la forza)
- *come si può spiegare che alcuni materiali "scivolano" (sul terreno...) ed altri invece no?* (qui si potranno richiamare o evidenziare alcuni concetti (natura particellare della materia e relative forze intermolecolari diverse per diversi materiali e diversi stati fisici...).

**Riferimenti agli Standard**

**Area scientifica. Standard M**  
 Livello 3. *Applica consapevolmente una modalità di ragionamento predittivo/probabilistico per ottimizzare le sue scelte strategiche. Descrive e rappresenta sinteticamente procedure e strategie.*  
**Standard L**, Livello 2. *Seleziona informazioni riguardanti caratteristiche di gruppi ristretti di persone in funzione di uno scopo. Decifra le rappresentazioni grafiche ed i simboli più ricorrenti per rappresentare dati di popolazione.*

Nella discussione quasi certamente emergerà la parola "attrito" sulla quale l'insegnante farà puntare l'attenzione per una sua definizione (e/o ri-definizione). le domande di mediazione saranno subordinate al contesto, alla discussione in atto (*l'attrito è sempre "negativo" per la vita quotidiana?...quando l'attrito è conveniente?...come potrei definire l'attrito?....*)

- è come... è come se... (mi costruisco un modello)
- *quali potrebbero essere le alternative ai rulli per spostare più facilmente il mio oggetto pesante?* (discussione, congetture condivise, verifica, riflessione)
- se... allora... (cambio una delle variabili)
- *se i cilindri fossero più "grossi", che cosa cambierebbe? (l'oggetto sarebbe più veloce/più lento rispetto ai rulli...?). se i cilindri avessero diametro di base doppio... se i cilindri avessero diametro di base ridotto a metà...* (discussione, congetture condivise, verifica, riflessione)
- *sarà più facile spostare lo stesso oggetto con rulli "grossi" o con rulli "fini"?* (discussione, congetture condivise, verifica, riflessione)
- *quale sarà la forza necessaria a spostare un oggetto al variare del suo peso?* (con rulli o senza rulli, a parità di altre variabili come la superficie di appoggio...)
- *quale sarà la forza necessaria a spostare un oggetto al variare della sua superficie di appoggio?* (con rulli o senza rulli, a parità di altre variabili come il peso...)

- *immagina un mondo privo di attriti* (racconto di fantasia come lavoro domestico o come attività in classe o come verifica....)
- documentazione dell'attività (lavoro personale)
- relazione sull'attività svolta (che cosa ho fatto, come, che cosa ho visto, che cosa ho capito rispetto a prima, che difficoltà ho ancora....)
- elaborazione mappa concettuale

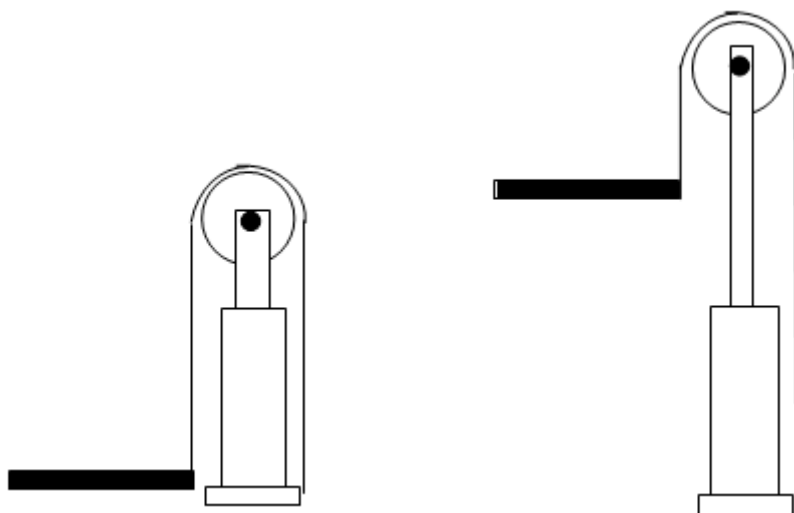
### **La carrucola**

Nell'esperienza precedente abbiamo visto come il movimento di due parti di un'attrezzatura (la piattaforma e i rulli) poteva essere descritto mediante la semplice equazione  $p=2r$ .

Ci sono molte altre situazioni nella realtà che possono essere descritte con la stessa equazione l'importante è saper riconoscere l'azione del raddoppiare.

Anche questa volta partiamo dalla realtà che è alla portata dell'esperienza dei ragazzi. Presentiamo il meccanismo di sollevamento di un ascensore idraulico oppure del sollevatore idraulico di alcuni tipi di carrello.

In entrambi i meccanismi il pistone idraulico non solleva direttamente la cabina o le forche ma lo fa attraverso una fune metallica ancorata da una parte alla struttura fissa e dall'altra alla struttura mobile e il pistone spinge su una puleggia (vedi figura)



Anche in questo caso si nota che gli spostamenti della piattaforma e la corsa del pistone non sono uguali, la piattaforma esegue uno spostamento maggiore rispetto al pistone.

A questo punto possiamo esplicitare il problema insito nell'attrezzatura: quanto si sposta di più della piattaforma?

Vediamo se è possibile costruire un modello che ci permetta di simulare il funzionamento descritto. In questa fase cerchiamo di far individuare quali elementi sono determinanti per riprodurre il funzionamento dell'attrezzatura:

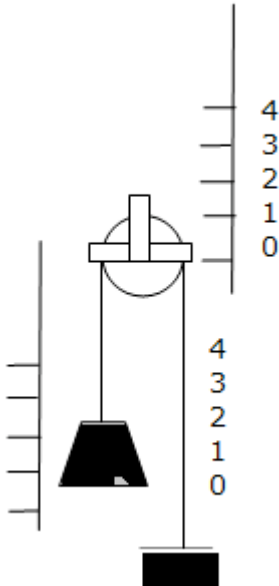
- La fune con un estremo ancorato fisso e uno ancorato alla piattaforma o carico da sollevare e mobile.
- Una puleggia sulla quale scorre la fune e spinta

**Riferimenti agli Standard.**  
**Area scientifica, Standard G**  
 Livello 3. *Usa notazioni specifiche e formalismi, applica concetti matematici, procedure e strumenti operativi per risolvere problemi.*  
**Standard H** Livello 4  
*Generalizza strumenti matematici per affrontare problemi complessi di tipo personale, sociale, ambientale e tecnologico.*

dal pistone, quindi il movimento del tutto dipende dal movimento della puleggia.

- La spinta del pistone che viene sostituita con l'azione della nostra mano mentre un semplice peso simula il carico da sollevare.
- Un dispositivo per misurare gli spostamenti.

Schema del modello



A questo punto l'esperienza che dovrebbe prendere pochissimo tempo ha il fine di trovare in quale modo l'altezza raggiunta dalla mano che trascina la puleggia e l'altezza raggiunta dal carico sono legate fra loro.

L'esperienza ha il vantaggio di poter essere mostrata a tutta la classe, le linee orizzontali, tracciate con gesso sulla lavagna o con un pennarello su un foglio di carta debbono essere sufficientemente spesse, per evitare che qualcuno dica: "mi pare che la puleggia si sia alzata di 3 divisioni e \_ o cose del genere.

Sfruttando l'esperienza precedente raccogliamo i dati relativi agli spostamenti in una tabella per evidenziare eventuali relazioni

Altezza puleggia	0	1	2	3	4	
Altezza carico	0	2	4	6	8	

I ragazzi riconoscono facilmente la situazione uguale a quella dell'esperienza precedente, quindi indicando con "**p**" l'altezza raggiunta dalla puleggia e con "**c**" l'altezza raggiunta dal carico si arriva facilmente a descrivere il legame tra le due grandezze con l'equazione:

$$c = 2 p$$

A questo punto l'esperienza può considerarsi conclusa per quanto riguarda la capacità di descrivere quanto accade mediante il linguaggio abbreviato e sintetico della matematica.

Ma possiamo approfittare della situazione per ulteriori approfondimenti relativamente al concetto di funzione che avevamo accennato nell'esperienza precedente.

In tutte e due le esperienze abbiamo riconosciuto l'operazione di raddoppiare e quindi in tutti due i casi siamo pervenuti a due formule molto simili.

Possiamo chiedere alla classe se è possibile usare una stessa formula per descrivere le due situazioni.

La discussione evidenzia che le equazioni si differenziano solo per le lettere usate per indicare le variabili.

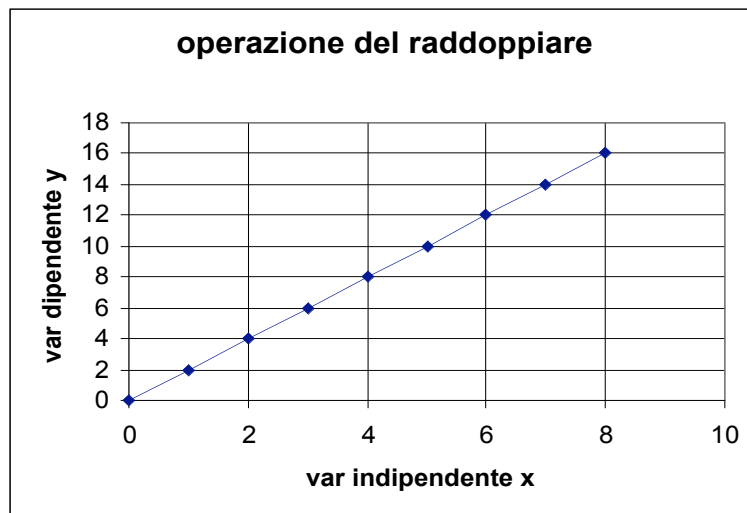
Si arriva presto al suggerimento di usare le lettere x e y per indicare delle generiche variabili in modo da arrivare alla relazione

$$Y = 2x$$

Il nostro intervento in questa fase consiste nell'assegnare la y alla variabile dipendente e x alla variabile indipendente come si usa fare di solito.

Generalmente sono lettere già usate dalla maggior parte degli studenti e lavorando sulla loro esperienza è facile arrivare all'uso delle lettere x e y per indicare gli assi nel sistema del piano cartesiano.

Possiamo proseguire il lavoro rappresentando sul piano cartesiano l'equazione  $y=2x$



Alla fine facendo una sintesi del lavoro fatto cerchiamo di mettere in evidenza che abbiamo usato 3 sistemi diversi per descrivere lo stesso fatto.

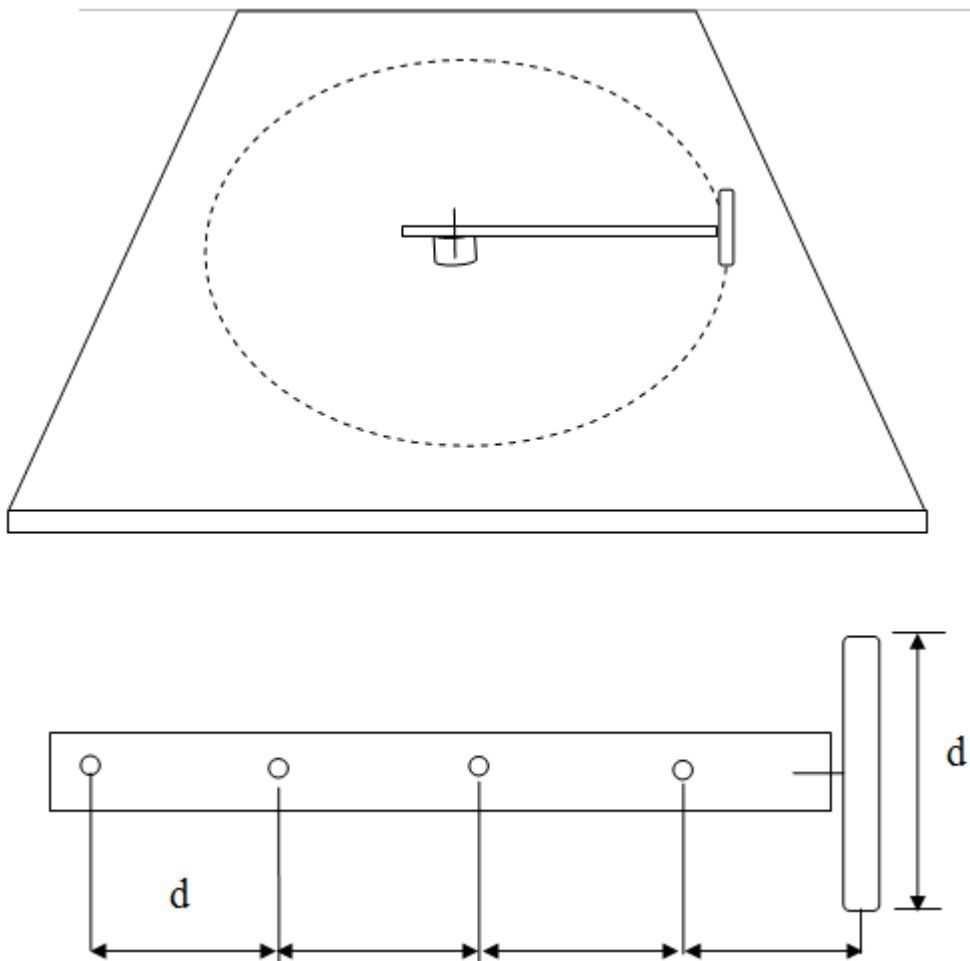
- 5 Una tabella di dati
- 6 Un grafico cartesiano
- 7 Una equazione

Tre sistemi diversi per le potenzialità espressive che ciascuno evidenzia, sulla discussione tra le caratteristiche espressive di ciascun metodo possiamo concludere l'unità.

## La rotellina

Per introdurre questa attività si potrebbe far precedere questa esperienza da una discussione sul perché gli atleti cercano di guadagnare il percorso più interno della curva quando corrono in una pista circolare, o sul perché si deve provvedere di un differenziale l'asse motrice di un'automobile.

Il congegno di facile costruzione che presentiamo per stimolare attraverso semplici esperienze la capacità di scoprire relazioni fra grandezze e la capacità di esprimerle mediante il linguaggio della matematica è illustrato nella figura sottostante.



### Descrizione

Una punta, può essere un chiodo, è infilata al centro di una tavoletta. Una sottile striscia di legno o di metallo porta dei fori ad intervalli regolari. Una rotella è attaccata all'estremità della striscia, come nell'illustrazione. I particolari della striscia e della rotella sono nella parte bassa della figura.

La distanza fra un foro e l'altro è uguale al diametro della rotella, e la stessa distanza separa la rotella dal foro più vicino. Alcune rondelle o altro spessore separano la punta dal piano della tavoletta, per fare in modo che quando l'apparecchio è montato la striscia sia in posizione perfettamente orizzontale. La striscia è ora libera di ruotare intorno alla punta, in modo che la rotella seguirà un percorso circolare, indicato nella figura con la circonferenza tratteggiata. Se la rotella ruotasse senza scivolare dovrebbe compiere un numero intero di giri.

### Attività

La punta viene inserita di volta in volta in ciascuno dei fori, viene fatta ruotare la striscia e si osserva e si annota il numero di giri compiuto dalla rotella.

Si cerca quindi una legge che metta in relazione il numero dei giri con il numero che caratterizza il foro usato.

Il foro più vicino alla rotella è il n° 1, il successivo il n° 2 e così via.

Se prendiamo la distanza tra un foro e il successivo come unità di misura, il numero che contrassegna il foro dà il raggio della circonferenza percorsa dalla rotella.

*Es. Nella figura la punta è stata inserita nel foro numero 4 e il raggio della circonferenza tratteggiata è 4 volte l'unità di misura.*

I risultati raccolti dovrebbero essere come quelli raccolti nella seguente tabella

Foro n°	N° giri rotella
1	2
2	4
3	6
4	8
N	2n

**Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard H** Livello 3. *Conosce il significato operativo di alcune variabili geometriche e fisiche e le utilizza per analizzare problemi relativi al movimento.* **Standard H** Livello 4. *Generalizza strumenti matematici per affrontare problemi complessi di tipo personale, sociale, ambientale e tecnologico.*

Discussione.

Ancora una volta è facile vedere che il numero di giri della rotellina è doppio del numero che individua il foro. Per i ragazzi è facile a questo punto riassumere il tutto con la relazione:

$$g = 2n$$

dove g rappresenta in n° di giri della rotella e n il numero di posizione del foro.

### Sviluppi delle tre esperienze

A questo punto possiamo cercare di tirare le fila delle tre esperienze fatte (i rulli, la carrucola e la rotellina). Tutte e tre le esperienze esemplificano una delle più semplici funzioni che si possono trovare: quella di raddoppiare.

- $P = 2r$
- $C = 2p$
- $G = 2n$

Possiamo chiedere ai ragazzi se è possibile scrivere una relazione unica per tutte e tre le relazioni trovate. La discussione va portata verso l'uso di una lettera unica per la variabile indipendente ed una per la variabile dipendente (x e y) e quindi a scrivere una relazione  $y = 2x$

Naturalmente si potrebbero trovare altre esperienze che portano a risultati quali  $y = 3x$  oppure  $y = 4x$  oppure come è più probabile se l'esperienza non è stata condotta con molta precisione ad un risultato più complicata del tipo  $y = 3,29x$ .

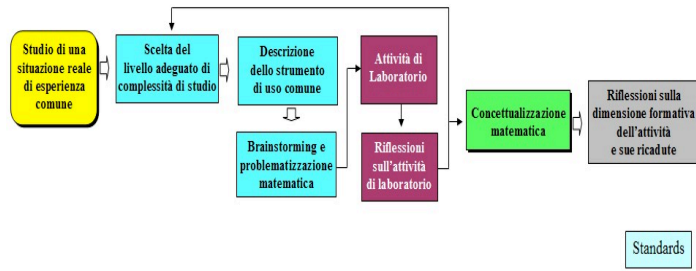
Ma possiamo chiedere cosa hanno in comune tutte queste relazioni. Le risposte che si hanno sono del tipo: la variabile x viene moltiplicata per un certo numero in tutti i casi. Possiamo quindi andare verso un'altra grande generalizzazione e raggruppare tutti questi risultati nella forma più generale  $y = ax$ . Dove a è quel certo numero ben determinato che dipende dalla natura dell'esperienza.

Questo gruppo di tre esperienze permette ulteriori sviluppi, il più immediato è quello verso la forma più generale dell'equazione di primo grado  $y = ax + b$  (si potrebbe ripetere l'esperienza con i rulli partendo con gli indici che non collimano ma sono falsati di un certo valore che corrisponde al valore  $b$  dell'equazione).

Oppure approfondire la rappresentazione grafica delle equazioni che è data da una retta e perciò tali equazioni vengono chiamate lineari e le relazioni risultanti fra la  $x$  e la  $y$  sono dette funzioni lineari.

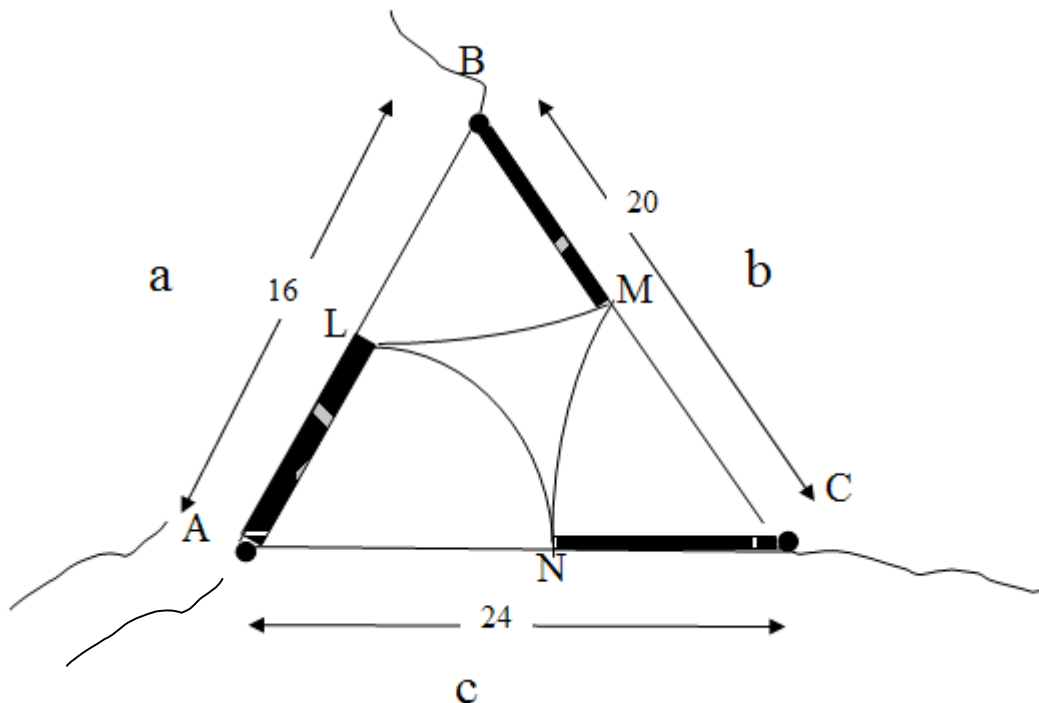
4.2 Il recinto

Si utilizza un problema un po' particolare per mettere a punto o affinare quello che viene chiamato metodo per tentativi per risolvere un problema. Ragionando poi sui tentativi fatti e con poche competenze di algebra elementare si giunge a generalizzare il metodo della sua soluzione.



*Il problema*

Nella figura ci sono 3 pali A, B, C alle distanze indicate (in piedi, per avere dei numeri semplici) che delimitano 3 recinti. Il pastore vuole montare una sola porta a ciascun palo in modo da chiudere uno dei tre recinti e mettere in comunicazione gli altri due. Le porte sono indicate da AL, BM, CN. Come è indicato nella figura esse non chiudono completamente lo spazio fra i due pali. Ad esempio se vuole chiudere il recinto a; l'uomo farà ruotare la PORTA BM nella posizione BL in questo modo l'apertura AB verrà chiusa ma rimarrà il collegamento fra i recinti b e c. Se vuole chiudere il recinto b allora lascerà la porta BM dove si trova e farà ruotare la porta CN nella posizione M, in questo modo rimane chiuso il lato BC e in collegamento i recinti a e c. Ultimo caso, se vuole chiudere il recinto C; posizionerà la porta in A in AN e la porta in C in CN.



Il problema è: se tutte le porte devono incontrarsi perfettamente senza sovrapporsi, quali devono essere le dimensioni di ciascuna? Come abbiamo premesso cerchiamo la soluzione mediante tentativi, cercando di ragionare sui tentativi fatti in modo da avvicinarci alla soluzione. Supponiamo di provare partendo dalla porta incernierata nel palo A con una misura di 3 piedi. Chiediamo quanto dovrà essere lunga la porta in B per chiudere il varco.

La risposta, 13 piedi, arriva facilmente. Questa porta ruota in posizione M per chiudere il varco BC; chiediamo quanto deve essere lunga la porta in C per completare la chiusura. La risposta 7 piedi viene individuata facilmente. Ora per il lato AC abbiamo la porta in A lunga 3 e la porta in C lunga 7 piedi, la loro somma dà 10; rimane quindi un'apertura di 14 piedi.

Dobbiamo provare di nuovo.

Visto che ci rimane un'apertura dovremo aumentare la lunghezza della prima porta, supponiamola lunga 4 piedi, troviamo quella in B (12) e quella in C (8) per poter chiudere perfettamente il lato AB e BC. Ma per i 24 piedi del varco AC abbiamo una porta di 4 e una di 8, ci rimane un'apertura di 12 piedi, diminuita rispetto al tentativo precedente. Vuol dire che stiamo cambiando nel verso giusto.

I nostri successivi tentativi potrebbero essere registrati nel seguente modo:

Porta in A	3	4	5	6	7	8	9	10
Porta in B	13	12	11	10	9	8	7	6
Porta in C	7	8	9	10	11	12	13	14
Apertura	14	12	10	8	6	4	2	0

Nell'ultimo tentativo, scomparsa l'apertura, si ottiene la soluzione.

Costruire la tabella è istruttivo: per molti ragazzi sarà questo il modo più semplice per risolvere il problema.

Dalla tabella tuttavia si possono trarre ulteriori insegnamenti.

Vediamo di ricostruire i vari passaggi assieme ai ragazzi, partendo dalla prima operazione, la scelta di un valore per la porta in A.

Se la lunghezza della porta in A può assumere un valore qualsiasi allora lo possiamo indicare con X.

Come abbiamo fatto a trovare la lunghezza della porta in B?

Sottraendo la lunghezza della porta in A da 16 (lunghezza del varco).

Come possiamo indicare questa operazione  $\Rightarrow 16 - x$

E per trovare la lunghezza della porta in C

Sottraendo la lunghezza della porta in B da 20 (lunghezza del varco)

Come indichiamo questa operazione  $\Rightarrow 20 - (16 - x)$

$$\Rightarrow 20 - 16 + x$$

$$\Rightarrow 4 + x$$

L'espressione  $20 - (16 - x)$  è equivalente a  $20 - 16 + x$ , ovvero  $4 + x$ .

Dalla tabella infatti si può vedere che i numeri della riga "porta in C" superano di 4 quelli della riga porta in A

Quindi abbiamo la lunghezza di tutte e tre le porte (aggiungiamo una colonna alla tabella)

Come facciamo a trovare l'apertura che eventualmente rimane nel varco AC?

Sottraiamo la lunghezza della porta in A e della porta in C da 24 (lunghezza del varco)

Come indichiamo questa operazione ?

$$\Rightarrow 24 - x - (20 - (16 - x))$$

Oppure

$$\Rightarrow 24 - (x + (4 + x))$$

$$\Rightarrow 24 - x - 4 - x$$

$$\Rightarrow 24 - 4 - 2x$$

$$\Rightarrow 20 - 2x$$

Quand'è che consideriamo risolto correttamente il nostro problema ?

Quando non rimane nessuna apertura, cioè l'apertura che rimane vale 0

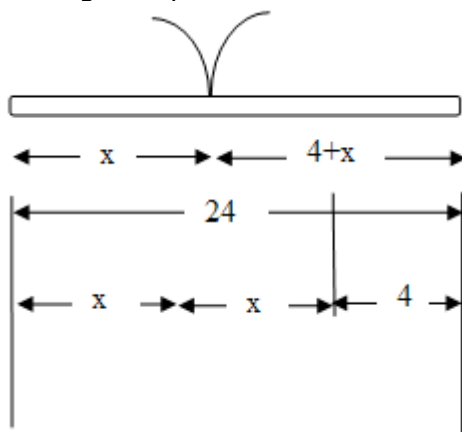
Come indichiamo questa condizione ?  $\Rightarrow 24 - x - (20 - (16 - x)) = 0$

$$\Rightarrow 20 - 2x = 0$$

La nostra tabella diventa ora

Porta in A	3	9	10	X
Porta in B	13	7	6	16-x
Porta in C	7	13	14	20-(16-x)
Apertura	14	2	0	20 - 2x

Vogliamo scegliere x in modo tale che le porte in A e in C siano abbastanza grandi da chiudere il lato AC, che è lungo 24 piedi.



La situazione è illustrata dal disegno e dallo stesso possiamo far trovare la lunghezza di 2x

$$2x = 20$$

e quindi

$$x = 10$$

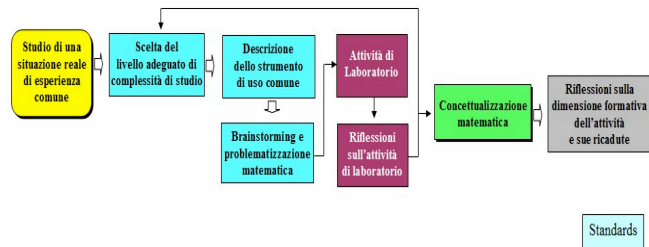
Trovata la prima porta il modo di trovare le successive è già stato indicato.

Quello che dobbiamo cercare con questa operazione è di creare e mantenere il collegamento tra le operazioni concrete (di sottrazione) facilmente individuate dai ragazzi e la loro rappresentazione simbolica. In questo modo la scrittura simbolica di operazione nella loro mente non è qualcosa priva di significato ma qualche cosa che riescono a dominare e comprendere completamente.

Da notare che l'indicazione simbolica della condizione di completa chiusura ( $20 - 2x = 0$ ) è una equazione di primo grado, quindi questo problema ci può servire anche per introdurre questo argomento. L'aiuto del disegno ci porta alla soluzione di questa semplice equazione anche senza una trattazione specifica.

### 4. 3 Lo spessore

*Si propone un problema che all'apparenza è molto semplice. Trovato il modo di risolverlo velocemente si scoprirà l'utilità di rappresentare graficamente funzione non lineari.*



Prendiamo un foglio di carta e pieghiamolo a metà e chiediamo quanto vale ora lo spessore rispetto all'inizio. Chiediamo ora ai ragazzi di piegare il foglio a metà altre volte magari fino a 100 e di dire quanto sarà lo spessore della carta dopo aver piegato a metà 100 volte il foglio.

In genere l'apparente semplicità del problema porta i ragazzi a dare delle risposte affrettate e difficilmente corrette. Anche i risultati proposti in genere sono molto diversi da ragazzo a ragazzo; partiamo da queste diversità per introdurre la necessità di un ragionamento più organizzato. Supponendo che lo spessore del foglio di carta sia di 0,1 mm che cosa succede allo spessore ad ogni piega?

Raddoppia  $0,1 * 2$

Questa operazione si ripete ogni volta che pieghiamo la carta.

Quindi abbiamo trovato lo schema ricorrente e quindi un buon punto di partenza. Come al solito la raccolta di alcuni risultati ci aiuterà a trovare la risposta.

n° pieghe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	N
Spessore	1	2	4	8	16	32	64	128	256	

Vediamo che nella riga dello spessore ogni numero è il doppio del precedente, sappiamo che l'operazione di raddoppiare è generalizzata dall'espressione  $2^n$ . Proviamo a riscrivere la tabella indicando l'operazione

n° pieghe	Spessore (in decimi di mm)
0	1
1	$1*2$
2	$1*2*2$
3	$1*2*2*2$
4	$1*2*2*2*2$
5	
6	

Lo schema adesso è più evidente, vediamo la moltiplicazione per 2 ripetuta più volte; quante volte?

Un numero uguale alle pieghe della carta.

Come possiamo abbreviare la scrittura di una operazione ripetuta uguale tante volte? Utilizzando le potenze aggiungiamo una colonna alla tabella

Qualche problema potrebbe nascere per l'esponente uguale a 0, eventualmente si possono dare delle spiegazioni particolari.

Trovato il modo di risolvere velocemente il problema, troviamo lo spessore di questo foglio ripiegato 100 volte

$$S = 0,1 * 2^{100}$$

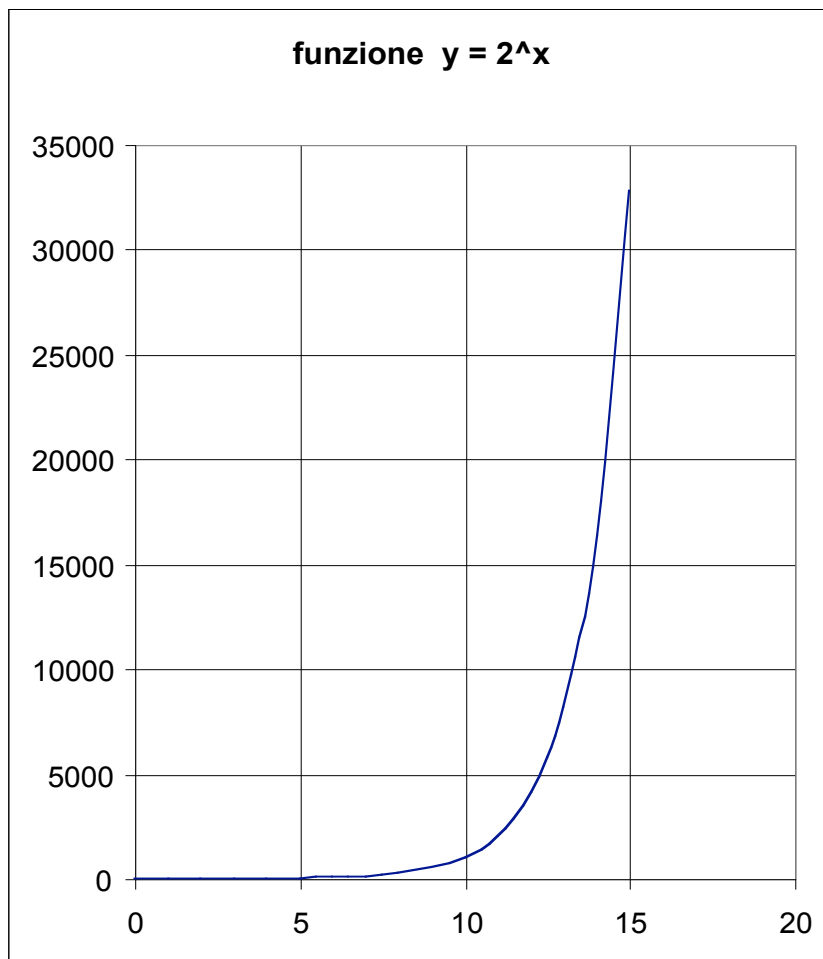
Usando la calcolatrice

$$S = 0,1 * 1,26765E+30$$

Sicuramente la dimensione del numero sbalordirà i ragazzi.

**Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard G.** Livello 3. *Usa modelli grafici per rappresentare e comunicare dati.* **Standard H,** Livello 4 *Generalizza strumenti matematici per affrontare problemi complessi di tipo personale, sociale, ambientale e tecnologico relativi al trasporto ed al viaggio.*

Il perché di un numero così grande viene illustrato se facciamo il grafico della funzione  $Y = 2^x$



In questo modo introduciamo anche delle funzioni non lineari per non indurre l'errata convinzione che tutte le funzioni siano rappresentabili da rette.

## 4.4 Note sulle unità didattiche

### ***La matematica attraverso le attività manuali: Rulli, puleggia e rotellina.***

Nella nostra scuola (professionale) i ragazzi sono sempre in contatto con apparecchiature e sistemi di vario genere, il riconoscere nel loro funzionamento delle leggi matematiche ha una doppia valenza:

da una parte migliora la capacità di comprenderne il funzionamento e di saperlo descrivere con precisione e in modo sintetico

da un'altra parte diventa momento di stimolo per approfondire alcuni concetti della matematica stessa.

Si cerca così di rendere vivaci i concetti di matematica associandoli alla nostra esperienza del mondo fisico. Si utilizzano semplici attrezzature ed esperimenti che possono essere utili allo scopo.

Le attrezzature sono semplici e di basso costo e di sicuro affidamento.

Le attrezzature hanno anche un altro scopo che è quello di introdurre il problema alla classe. Questo è un momento fondamentale per la riuscita della nostra azione formativa. In questa fase dobbiamo stimolare la curiosità dei ragazzi, motivarli all'affrontare delle difficoltà è un po' come la fase di preparazione di una partita dove si devono attivare tutte le risorse fisiche e mentali per affrontare la sfida. Qua si può far leva su molti aspetti del carattere ( la curiosità, lo spirito di emulazione, l'agonismo, amor proprio ecc.) di un ragazzo per trovare quello giusto che fa scattare la "serratura" ed ogni ragazzo può avere una chiave diversa. Solo quando il ragazzo fa suo il problema e pronto per affrontarlo e risolverlo. Possiamo quindi iniziare la nostra sfida intellettuale che strutturiamo come un misto fra una congettura ed un tentativo di sperimentazione; operando con metodo sperimentale congetturando la tesi, cambiando e ricambiando le ipotesi, scrivendo e riscrivendo la possibile soluzione. In questa situazione lo studente più motivato si aspetta una soluzione ed è forse in grado lui stesso di prospettare una prima, ancorché grossolana. Ma anche allo studente annoiato dalla cose della matematica, portato quindi a dare risposte casuali e forse insensate, l'insegnante potrà far capire che le risposte che si danno ad un problema (anche non di matematica) devono essere ragionevoli, rispettose del buon senso: anche questo studente dovrà dunque iniziare a prendersi carico della responsabilità delle proprie risposte.

Nei passaggi più dialogici e concettuali, come ad esempio quelli sull'attrito, l'attività potrà essere condotta per gruppi cooperativi che lavoreranno su problemi (domande di mediazione del docente) e discuteranno dapprima in modo "libero" (linguaggio comune). L'insegnante chiederà via via conto del significato attribuito a termini "importanti": i significati saranno discussi e mediati fino a raggiungere (almeno in qualche ambito) consapevolezza della "responsabilità" che ci si assume dicendo "parole". almeno in qualche ambito si farà rilevare la differenza tra "linguaggio comune" e "linguaggio scientifico" con l'obiettivo di raggiungere almeno una maggiore cautela nell'esprimersi ed una maggiore consapevolezza nella comprensione quando si ascolta.

La discussione dovrebbe servire anche a migliorare la capacità di "farsi capire", di "ascoltare", di "argomentare" per convincere e di "farsi convincere" da argomentazioni che sono ritenute valide.

I gruppi possono lavorare sullo stesso problema che porteranno alla discussione aperta in classe o potranno lavorare su problemi diversi: anche in questo caso ciascun gruppo riferirà e il lavoro sarà discusso a classe aperta.

L'insegnante avrà il compito in primo luogo di stimolare la discussione con domande relative al contesto (prova a ridefinire quanto hai detto, che cosa significa per voi  $xy$ , come mai dici che...) oppure parafrasando quanto detto dagli allievi e chiedendo di riflettere...). in secondo luogo potrà intervenire con estensioni o approfondimenti concettuali contemporaneamente/dopo (nel contesto) le discussioni in classe o nei gruppi, partendo (cogliendo come occasione) dalle situazioni che si sono venute a creare o misconcetti.

L'attività sull'attrito vuole assumere carattere interdisciplinare (non solo matematica/scienze) anche per l'accento posto sugli aspetti di riflessione e produzione linguistica e per l'aspetto dedicato alla comunicazione verbale. Le domande di mediazione serviranno per accendere la discussione in cui vengono discusse ed eventualmente condivise congetture che in seguito potranno essere verificate. i risultati della verifica saranno la base per ripercorrere il processo (come mai prima pensavo che.... e invece adesso...).

4.5 Analisi del modello prevalente *Modelli di attività manuali*

Tutte le unità didattiche presentate afferiscono ad un modello prevalente che è stato definito **Modelli di attività manuali**.

Il punto di partenza è un'esperienza comune di tipo manuale o fisica.

Attraverso la discussione si focalizza l'aspetto matematico di un problema relativo alla situazione esaminata. Lo si schematizza e circoscrive ad un livello di complessità adatto agli interlocutori. Si cerca di realizzarne un modello che permetta di riprodurre per gli aspetti che interessano la situazione oggetto di studio.

Si riproduce attraverso il modello la realtà studiata, si raccolgono i dati necessari, si analizzano i risultati, si congettura rispetto al principio matematico, si verifica se quanto congetturato trova riscontro nei dati dell'esperimento.

Si passa dal caso particolare al generale attraverso la concettualizzazione matematica dei risultati prodotti dall'esperienza.

Si valutano le ricadute formative dell'esperienza.

