

5. PROGRESSIONI DI CONCETTI

Le unità didattiche:

5.1 Figure geometriche

5.2 I numeri

5.3 Operatori logici

5.4 Ordinare e catalogare

5.5 Probabilità e statistica

5.1 Figure geometriche

In un ordine di complessità crescente e partendo dall'osservazione della realtà che emerge dal ricordo di figure geometriche note, vengono esemplificati concetti come figura geometrica, angolo che introduce a quello di triangolo, simmetria, retta, l'insieme dei parallelogrammi, piano, punto, quindi area di una figura piana, area laterale o totale di un solido, circonferenza, ellissi e parabola come luoghi di punti.

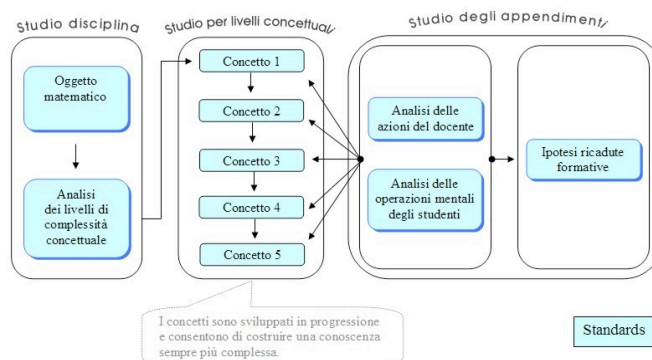


Figura geometrica

L'idea è quella di ricordare figure geometriche note per arrivare a dare una definizione di "figura geometrica", partendo dall'osservazione della realtà, per sua natura intrinseca, tridimensionale, evidenziando come la matematica ci aiuti a modellarla, mettendo in risalto i soli aspetti importanti per il problema che dobbiamo risolvere o il concetto che vogliamo indagare.

Se ad esempio vogliamo calcolare quanta carta adesiva mi serve per ricoprire un tavolino, non è per me di interesse in quel momento, che il tavolo abbia una sua altezza le uniche dimensioni che mi interessano sono larghezza e lunghezza e l'operazione mentale che faccio è quella di rappresentarmi il tavolo come un rettangolo. Il rettangolo non è un'entità riscontrabile nella realtà se non con l'astrazione propria della matematica che mi porta a modellizzare la superficie del tavolino con un rettangolo.

Il docente deve stimolare l'osservazione per arrivare, con continue domande (che figura è?, che caratteristiche ha?, che differenza dall'altra?, cosa ha in comune con?, come potresti definirla?, è chiara come definizione? Qualcuno non ha capito? E se dicessi che?...), ad una o più classificazioni (ad esempio rispetto agli angoli e ai lati).

Lo studente: Osserva il mondo reale con attenzione e metodo? Annota differenze e analogie? Cerca di scoprire proprietà e caratteristiche di ciò che osserva? Si esprime in modo chiaro e condiviso con gli altri rispettando regole formali? Propone definizioni e classificazioni, verificandone in gruppo la chiarezza e la rigosità?

A tal fine l'insegnante dovrà quindi far emergere dall'osservazione le conoscenze pregresse e dare a queste conoscenze un'organizzazione chiara e consapevole, far emergere definizioni, classificazioni e condividerle con gli allievi. Facilitare il confronto e la condivisione.

Il concetto di angolo

Il concetto di angolo viene introdotto a questo punto perché l'idea è quella di passare dal più noto al meno noto

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B Livello 2.4 *Conosce il significato, riconosce graficamente ed usa termini geometrici come linea, retta, rette parallele, rette perpendicolari; lunghezza, larghezza, altezza, profondità.*

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard F Livello 2.2, Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati,...) e loro proprietà a partire da oggetti concreti con linguaggio corrente; distingue angoli più comuni. **Standard F**, Livello 1.4, Riconosce rette parallele, perpendicolari, angoli retti in oggetti concreti; si orienta nello spazio in base ad indicazioni correnti (sopra, sotto..).

(dovrebbe essere emerso il concetto intuitivo di angolo come di un'entità comune alle figure geometriche, questo potrebbe essere il primo concetto di cui dare una definizione rigorosa). Quindi la successione più favorevole pare angoli, triangoli, quadrilateri, cerchi, ellissi, parabole. Inoltre si decide di "ritardare" l'introduzione degli enti geometrici fondamentali (punto, retta e piano) perché il loro ruolo può non essere apprezzato subito, "non si vede a cosa servono!", inoltre non essendo retta e piano limitate non possono essere disegnate sul foglio e "abbracciate" con lo sguardo. Occorre immaginare, intuire e quindi effettuare un'operazione mentale più alta da riservare dopo aver preso confidenza con concetti più "facili". Infatti il concetto di punto è ovunque presente e ben evidente, ma occorrerà arrivare ad una sua definizione rigorosa. Per ora ci si accontenta di un approccio intuitivo.

Lo studente: Distingue tra dati noti e dati incogniti? Opera scelte supportate da certezze teoriche? Trasforma in modello matematico un problema reale? Traduce in formula un problema? Riconosce il carattere di una soluzione (generale o particolare)?

Il docente deve iniziare a portare i soggetti in formazione verso definizioni di concetti geometrici fondamentali ed è indispensabile che non si cada nell'errore di accettare definizioni approssimative nella convinzione di facilitare l'apprendimento. Aspetto fondamentale e formativo della matematica è la sua rigosità, sarebbe quindi un imperdonabile errore rinunciare ad un simile aspetto. Consapevole, però, della difficoltà di alcuni concetti o modalità di definizione di alcune entità il docente deve prima decidere quali strade e metodi seguire. Nel caso dell'angolo, ad esempio, potrebbe essere introdotto rigorosamente come rotazione per evitare difficoltà concettuali legate ad altre definizioni (intersezione di piani, semirette...).

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B. Livello 2.5 *Riconosce, disegna alcune figure geometriche bi-dimensionali (quadrato, rettangolo, trapezio,...) con riferimento ad immobili, terreni e loro parti (unità di misura prefissate o informali), disegna su carta quadrettata multipli di misure di lunghezza e area.* **Standard F,** Livello 1.5, *Riconosce quadrati, rettangoli, cerchi in oggetti concreti; riconosce e nomina informalmente lati, angoli, diametri;* **Standard F,** Livello 4.11 *Utilizza linguaggio specifico geometrico-matematico integrandolo con linguaggio specifico di applicazione.*

Triangoli classificandoli sia rispetto a lati che agli angoli e introducendo la disuguaglianza triangolare fondamentale.

Il passaggio dall'angolo al triangolo è breve, la parola stessa permette di mettere in evidenza che il triangolo è una figura geometrica formata da tre angoli, per poi proseguire con l'individuazione nella realtà di figure modellizzabili attraverso un triangolo (segnali stradali,...) e alla loro classificazione.

Lo studente: Formula congetture e verifica l'attendibilità e la correttezza?

Il docente può proporre attività manuali tese a scoprire regole (con tre listelli costruire un triangolo: è sempre possibile?, si può ricavare una regola?...), può far leva sul gioco, sulla sfida nel trovare una soluzione ad un problema. Importante sarà anche tener sempre presente la socializzazione di quanto scoperto e l'ascolto del gruppo di lavoro. Si può far capire la differenza e l'importanza di esempi e contro-esempi.

Concetto di simmetria

Il concetto di simmetria oltre ad essere utile anche per introdurre altri interessanti concetti matematici ci riporta ad un'operazione riscontrabile in molte attività consuete. A questo punto le capacità di astrazione dello studente vengono ulteriormente chiamate in causa

Riferimento agli Standard. Area scientifica, Standard F, Livello 1.4 *Riconosce rette parallele, perpendicolari, angoli retti in oggetti concreti; si orienta nello spazio in base ad indicazioni correnti (sopra, sotto..)*

Lo studente: Procede da operazioni quali piegature, tagli, rispecchiamenti verso l'individuazione di proprietà in figure geometriche? Li evidenzia proprio tramite quelle operazioni? Intuisce caratteristiche e proprietà verificandole poi rigorosamente?

A tal fine il docente svilupperà processi per verificare congetture, cambiare ipotesi da verificare grazie alla scoperta di controesempi, faciliterà la riconduzione ad esempi di utilizzo della simmetria nel quotidiano (copertura libri, piegatura abiti, preparazione valigie, decorazioni,).

Concetto di retta

A questo punto il docente dovrebbe poter introdurre con una certa tranquillità il concetto di retta decidendo in base al contesto se introdurre una definizione assiomatica (auspicabile) o intuitiva. A questo punto gli allievi dovrebbero essere pronti per una ulteriore astrazioni.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B, Livello 2.4. *Conosce il significato, riconosce graficamente ed usa termini geometrici come linea, retta, rette parallele, rette perpendicolari; lunghezza, larghezza, altezza, profondità. Standard F, Livello 2.2 *Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati,...) e loro proprietà a partire da oggetti concreti con linguaggio corrente; distingue angoli più comuni.**

Lo studente: Si immagina entità non rappresentabili, raffigurandosi comportamenti e caratteristiche? È rigoroso nella comunicazione e nei procedimenti di pensiero?

Dal processo attivato si può prevedere come l'introduzione di questo concetto appare a questo punto indispensabile sia per l'introduzione dei concetti successivi sia per arrivare al concetto di parallelismo presentato sia attraverso la distanza costante che la mancanza di punti comuni, al concetto di perpendicolarità presentata attraverso il concetto di minimo cammino, al concetto di ordinamento lineare uno opposto all'altro introducendo semirette e segmenti, al concetto di angolo come intersezione di semipiani. Il docente dovrebbe riuscire a completare l'argomento con tutti quei concetti che possono tornare utile per il calcolo di aree e perimetri, quindi appare importante parlare di perpendicolarità e parallelismo.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B, Livello 2.5 *Riconosce, disegna alcune figure geometriche bi-dimensionali (quadrato, rettangolo, trapezio,...) con riferimento ad immobili, terreni e loro parti (unità di misura prefissate o informali), disegna su carta quadrettata multipli di misure di lunghezza e area. Standard F, Livello 2.3 *Riconosce, nomina principali figure piane e loro proprietà con linguaggio corrente. Standard F, Livello 4.11 *Utilizza linguaggio specifico geometrico-matematico integrandolo con linguaggio specifico di applicazione.***

L'insieme dei parallelogrammi (rettangoli, rombi, quadrati)

A questo punto la classe dovrebbe applicare le stesse operazioni per scoprire altre figure cercando di caratterizzarle.

Può essere più semplice approcciare e classificare le figure in base ai loro assi di simmetria, partendo dal quadrato, per passare al rettangolo e al rombo. Si può poi recuperare il triangolo per studiare quali triangoli hanno assi di simmetria per poi vedere quelle figure che non ne hanno. Oltre alle operazioni già presentate negli steps precedenti qui si insiste particolarmente sull'elasticità nel cambiare punto di osservazione.

Lo studente: Mette in atto osservazioni mirate ad alcuni aspetti cercando di ricavare da osservazioni diverse collegamenti facendo ipotesi da verificare?

Anche in questo caso il docente presenta concetti con modalità diversificate evidenziando come una stessa entità possa essere vista da angolazioni differenti e quindi porterà gli allievi a caratterizzare i parallelogrammi mediante lati, angoli e simmetrie (presentate attraverso tagli, piegature, uso dello specchio).

Il concetto di piano

Il piano può essere introdotto intuitivamente come l'ente che "legittima" tutto ciò che di cui si è parlato finora perché le figure fin qui esaminate vi appartengono. Anche in questo caso partendo da un concetto intuitivamente riconosciuto è poi indispensabile dare rigorosità al concetto ad esempio con una sua assiomatizzazione.

Si può poi esplorare il piano evidenziandone caratteristiche, proprietà e rapporto con le rette.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B, Livello 2.4, *Conosce il significato, riconosce graficamente ed usa termini geometrici come linea, retta, rette parallele, rette perpendicolari; lunghezza, larghezza, altezza, profondità.* **Standard F**, Livello 2.2, *Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati,...) e loro proprietà a partire da oggetti concreti con linguaggio corrente; distingue angoli più comuni.*

Lo studente: Comprende i rapporti che intercorrono tra rette e piani? Cerca di formulare congetture da verificare sperimentalmente?

Il docente accompagna l'allievo nella scoperta aiutandolo a formalizzare i risultati e supportandolo dove necessario con argomentazioni rigorose. Non si può far dimostrare tutto ad un allievo, in qualche caso è legittimo chiedergli un atto di "fiducia" enunciandogli un teorema e spiegandogli che altri l'hanno dimostrato per noi. Sarebbe però formalmente errato far passare un teorema come qualcosa di verificabile attraverso esempi.

Riferimento agli Standard Area scientifica. Standard B, Livello 1.2. *Conosce il significato intuitivo di alcune grandezze e termini relativi (lunghezza, area, volume), Livello 1.8 Misura con grandezze informali e alcune unità di misura convenzionali(m e cm), Livello 1.11, Comprende il significato intuitivo di perimetro, area, volume da esempi concreti e grafici (muri perimetrali, superficie...)* Livello 1.12 *Risolve quesiti guidati relativi a misure e calcoli di aree e perimetri.* **Standard B**, Livello 2.9. *Individua il perimetro come somma di lati, l'area come prodotto in esempi concreti o grafici (carta quadrettata).* **Standard B** Livello 4.8 *Scomponi figure*, Livello 4.9 *Riconosce equiestensione, calcola aree per scomposizione.* **Standard F**, Livello 1.6. *Riconosce in modo intuitivo perimetri, aree, da esempi concreti o grafici come reticoli quadrettati; legge e scrive loro simboli informali(es. mq,...)* Livello 1.8 *Valuta distingue i principali ordini di grandezza e unità di misura per misurare oggetti concreti.* **Standard F**, Livello 2.9. *Individua operandi per conoscere perimetri, calcola concretamente perimetri, Indica aree come prodotti, in esempi concreti o grafici, con unità informali.* **Standard F**, Livello 3.5. *Riconosce, disegna, descrive caratteristiche di figure bidimensionali con linguaggio specifico*, Livello 3.7. *Riconosce, calcola perimetri, aree, generalizzando procedure con linguaggio specifico non letterale (lunghezza per larghezza).*

Concetto di punto evidenziando come ogni figura possa essere vista come insieme di punti

Ultimo passaggio per completare l'insieme di concetti che ci eravamo riproposti di esaminare in questo cammino a ritroso: il punto come comune denominatore, come parte costituente, ma impercettibile in un certo senso "invenzione matematica" per "costruire" la geometria euclidea. Il concetto che dall'inizio aleggiava in tutta la trattazione vede adesso una sua formale e rigorosa definizione. Potrebbe essere definito come intersezione di due rette non parallele (e non coincidenti).

Area e perimetro di una figura piana

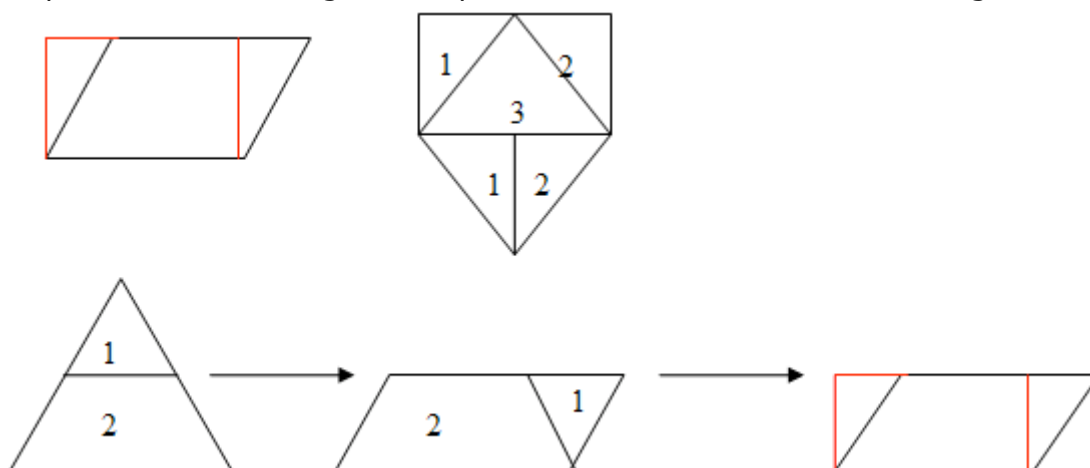
Questo passaggio fondamentale per la soluzione di problemi contingenti (del tipo di quelli proposti all'inizio) sottende il non trascurabile concetto di misura che se non già affrontato in precedenza dovrà essere inserito.

Vengono ricavate tutte le formule di base per il calcolo di perimetro o area nelle figure esplorate finora o comunque di figure che nei lavori di gruppo hanno destato interesse e curiosità.

Lo studente: Individua i concetti come spendibili nel quotidiano? Verifica le operazioni svolte? Riflette sugli errori?

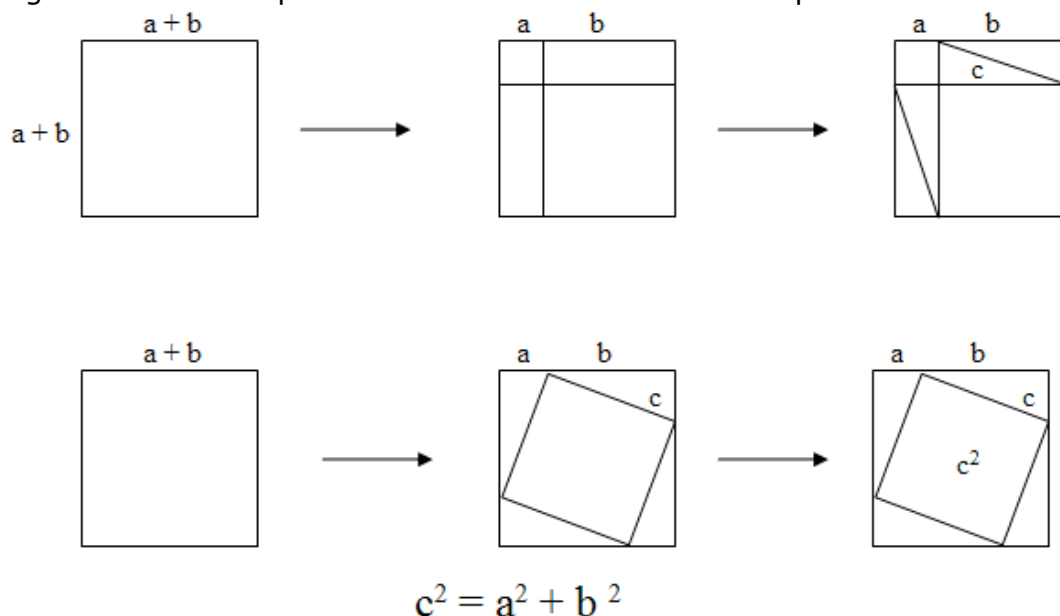
Mentre il docente insiste sulla differenza concettuale tra area e lunghezza. Presenta semplici problemi risolvibili con il calcolo di aree, fa riflettere sul concetto di misura e di unità di misura.

Sarà utile sottolineare l'indipendenza tra area e perimetro, non sono pochi gli allievi che sono convinti che se una figura ha il contorno più lungo di un'altra allora ha anche area maggiore. Per arrivare alla formula per calcolare l'area di una figura si può procedere utilizzando il metodo di approssimazione con carta quadrettata, passando attraverso l'area del rettangolo, quella del quadrato, per poi passare alle altre figure che possono essere ricondotte al rettangolo.



Il docente può porre problemi che sviluppino la capacità di problem solving ad esempio proponendo aree non direttamente riconducibili a figure note, ma scomponibili attraverso di esse.

A questo punto si potrebbe inserire il teorema di Pitagora. Anche in questo caso partirei dallo sperimentare con esempi per arrivare da una dimostrazione rigorosa. Per esempio sfruttando le costruzioni sotto riportate.



Area laterale o totale di un solido

La conclusione è un ritorno alla realtà. Tutto ciò che ho fatto a cosa mi serve? Nel quotidiano come posso spenderlo? E soprattutto quando calcolo l'area laterale di una scatola che voglio ricoprire di carta, quali concetti legittimano le operazioni che compio?

Partendo dall'osservazione della realtà dove tutto è tridimensionale e dalla potenza della matematica che fornendoci una modellizzazione bidimensionale di alcuni suoi aspetti ci permette di risolvere alcuni problemi, si può arrivare alla scomposizione di aree laterali e totali di solidi viste o come somma di aree di figure già viste (esempio area laterale di un parallelepipedo come somma dell'area di quattro rettangoli) o come riconducibili ad aree di figure note (esempio area laterale di un parallelepipedo come area di un rettangolo).

Riferimenti agli Standard. **Area scientifica, Standard B** Livello 2.2, *Ripartisce lunghezze (lato stanza, lato piastrelle).* **Standard F**, Livello 1.8, *Valuta distingue i principali ordini di grandezza e unità di misura per misurare oggetti concreti.* **Standard F**, Livello 2.12, *Indica aree come prodotti, in esempi concreti o grafici, con unità informali.* **Standard F**, Livello 3.7, *Riconosce, calcola perimetri, aree, generalizzando procedure con linguaggio specifico non letterale (lunghezza per larghezza).* **Standard B**, Livello 3.6, *Descrive proprietà di enti e figure geometriche comuni e le applica ad immobili e terreni,* Livello 3.12, *Calcola aree di stanze, alloggi.* **Standard B**, Livello 4.8, *Scomponete figure,* Livello 4.9, *Riconosce equiestensione, calcola aree per scomposizione.*

Lo studente: Applica i concetti appresi per fare un modello della realtà fonte del problema? Applica poi tecniche adeguate al contesto?

Per attivare i processi mentali dello studente descritti sopra il docente insisterà nelle operazioni di verifica dei risultati nell'attenzione alla scelta dell'unità di misura, del metodo seguito per la risoluzione del problema posto.

Possibili collegamenti/approfondimenti con altri aspetti della matematica possono essere: collegamento con l'aritmetica tramite retta numerica.

Questo può essere considerato come un approfondimento e un modo di far vedere gli stessi concetti da diversi punti di vista. Si può introdurre la rappresentazione dei numeri naturali sulla retta per poi passare alle frazioni.

Lo studente: Recupera concetti noti (numeri) per applicarli a realtà nuove o comunque associarli ad ambiti di indagine apparentemente disgiunti? Verifica le loro proprietà e caratteristiche con nuove metodologie?

Per attivare i processi di cui sopra l'insegnante fa emergere conoscenze pregresse e fornisce loro una nuova forma, una nuova contestualizzazione; facilita nell'allievo collegamenti e stimola la ricerca di analogie e differenze. Promuove spirito critico.

Circonferenza, ellissi e parabola come luoghi di punti.

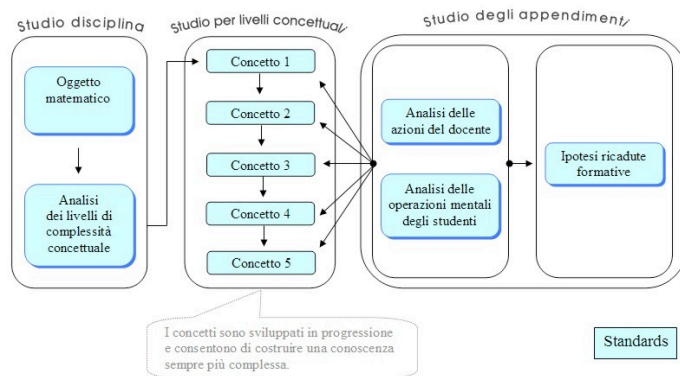
Arrivati al concetto di punto un possibile approfondimento potrebbe essere quello di inserire il concetto di luogo di punti visto come l'insieme di tutti quei punti che soddisfano determinate proprietà, in particolare si scelgono luoghi di punti noti che troviamo nel quotidiano e che si prestano ad attività di laboratorio.

Lo studente: Legge la realtà in maniera critica ricercando modellizzazioni note e proprietà che possano aiutare nella classificazione delle figure come luogo di punti?

A tal fine il docente deve portare l'allievo a scoprire e deve poi far verificare con attività di laboratorio la veridicità o meno delle sue intuizioni (scoperto che la circonferenza è il luogo di punti equidistanti da un punto verificare con punta e spago costruendo un rudimentale compasso quanto ipotizzato).

5.2 I numeri

Si comincia con introdurre il concetto di numero naturale trattando di insieme di figure, quindi, con altre esemplificazioni, che seguono vie algebriche o in alcuni casi geometriche, il concetto di numeri interi, di numeri razionali, numeri reali e la scoperta di alcune loro proprietà.

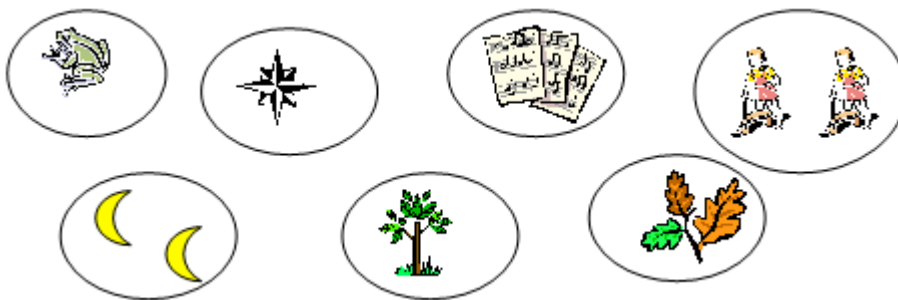


Contenuti

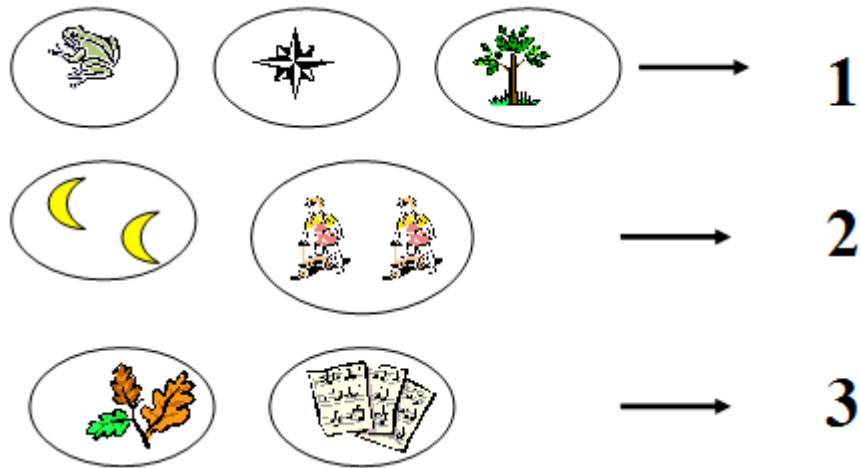
I numeri naturali

Si potrebbe pensare di introdurre i numeri naturali come caratteristica comune di insiemi che hanno la stessa numerosità, solo in un secondo tempo e se il docente ritiene che l'aula possa comprenderlo si può inquadrare questa caratteristica comune come una relazione di equivalenza (definendo quindi i numeri naturali come classi di equivalenza determinate dalla relazione di equipotenza tra insiemi. Questa definizione sicuramente più rigorosa e linguisticamente più corretta, ma anche più difficile da comprendere, non influisce sulla correttezza del discorso si lascia valutare al docente l'opportunità o meno di introdurlo come approfondimento). Si può stimolare la discussione mostrando ad esempio figure del tipo

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 4.3 Confronta, ordina, seleziona numeri interi, decimali, frazioni; **Standard E, livello 2.1,** Conta, legge, scrive numeri naturali e decimali; stima l'ordine di grandezza; **Standard G, Livello 3.1,** Conta, legge, scrive, confronta naturali e decimali; legge, confronta, seleziona dati da cataloghi, listini, tariffari. **Standard H, Livello 3.1,** Conta, legge, scrive, confronta, ordina naturali e decimali, approssima per difetto eccesso; raggruppa valori in classi; **Standard L, Livello 4.1.** Legge, scrive, rappresenta dati espressi con naturali, decimali, interi, razionali, percentuali; converte in notazioni equivalenti; distingue dati assoluti e relativi.



Gli allievi, invitati a catalogare gli insiemi rappresentati e non riuscendo trovare niente che li accomuni se non il numero degli elementi, dovrebbero arrivare ad una proposta simile:



A questo punto si possono introdurre i numeri naturali come classi di equivalenza o comunque come quel "qualcosa" che gli insiemi del primo, secondo, terzo, ... gruppo hanno in comune (1, 2, 3, ...) specificando che al gruppo si aggiunge il numero 0 come numeri di elementi dell'insieme vuoto.

Lavorando poi sull'insieme dei numeri naturali occorre evidenziare:

- le operazioni definibili (importante far notare che la somma ha sempre risultato, non così la sottrazione!!)
- Le proprietà del numero 1 (elemento neutro rispetto alla somma)
- Relazione di ordine

Lo studente: Passa da una dimensione concreta (gli insiemi) ad una dimensione astratta (il concetto di numero naturale)? Si concentra e riconosce i significati dei concetti affrontati?.

I numeri interi

L'introduzione dei numeri interi può seguire almeno due strade:

Un metodo intuitivamente facile è quello di introdurre i numeri interi partendo da una situazione concreta per esempio ipotizzando di trovarci su una strada dritta e di muoverci in verso nord o sud. (Ad esempio presentando un problema del tipo: " se percorro una strada

diritta verso sud per 400 metri e poi la percorro in verso opposto, verso nord, per 150 metri a quale distanza mi trovo dal punto da cui sono partito?") Gli spostamenti fatti dal punto di partenza non potranno essere semplicemente indicati con 1 km o 2 km perché così facendo non fornisco informazioni sulla verso. Questo può essere fatto introducendo i numeri interi che possiedono un segno che mi indica il verso (per esempio + per nord - per sud)

Sud

Nord

-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

Un'altra possibilità, forse un po' meno intuitiva, è quella di introdurre una relazione di equivalenza tra coppie ordinate di numeri naturali così definita: $(a,h) R (b,k) \Leftrightarrow (a+k=b+h)$ cioè se la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei termini medi. Per rendere più facile questo concetto il docente potrebbe far lavorare un po' gli allievi su insiemi di frazioni contenenti frazioni equivalenti invitandoli a dividerli in gruppi cercando di stimolare il ragionamento portandoli alla definizione sopra presentata.

Si creano così delle classi di equivalenza:

(1,0)	(2,1)
(3,2)	(4,3)
(5,4) ecc...	(x+1,x)

Ogni coppia di questa classe che può essere rappresentata da $[(1,0)] = +1$ gode della proprietà che il primo termine vale uno in più del secondo

(2,0)	(3,1)
(4,2)	(5,3)
(6,4) ecc...	(x+2,x)

Ogni coppia di questa classe che può essere rappresentata da $[(2,0)] = +2$ gode della proprietà che il primo termine vale due in più del secondo

(0,0)	(2,2)
(3,3)	(4,4)
(5,5) ecc...	(x,x)

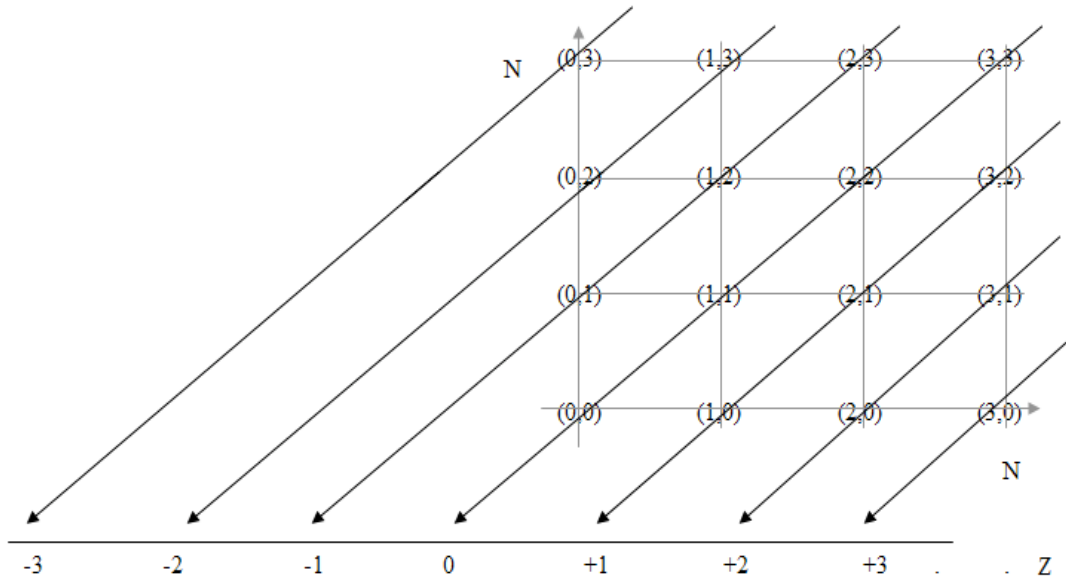
Ogni coppia di questa classe che può essere rappresentata da $[(0,0)] = 0$ gode della proprietà che il primo termine vale come il secondo

(0,1)	(1,2)
(2,3)	(3,4)
(4,5) ecc...	(x,x+1)

Ogni coppia di questa classe che può essere rappresentata da $[(0,1)] = -1$ gode della proprietà che il primo termine vale uno in meno del secondo

Si definisce così l'insieme dei numeri Z (interi).

Interessante può essere la rappresentazione grafica di Z che in qualche modo unisce le due presentazioni



Data la definizione resta la scoperta delle proprietà:

Operazioni (adesso sarà la divisione a non avere sempre risultato! Mentre per la differenza il "problema" è risolto)

Le proprietà del numero 0

Esistenza dell'opposto

Relazione di ordine

Con le stesse operazioni mentali ipotizzate nella spiegazione sul concetto di simmetria qui, in particolare, la trattazione del docente dovrà assumere da una parte l'aspetto della rivisitazione di concetti almeno intuitivamente noti ai quali è arrivato il momento di dare un impianto rigoroso, dall'altra l'aspetto della costruzione, propria degli insiemi numerici, che parte da un insieme per allargarlo via via con potenzialità sempre maggiori. Il docente deve sottolineare l'introduzione di un nuovo insieme numerico come un'esigenza imprescindibile per aggiungere potenzialità nuove (passare dall'addizione, alla sottrazione, alla divisione, alla radice quadrata..) e stimolarli perché loro capiscano le novità.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard E Livello 2.1. *Conta, legge, scrive numeri naturali e decimali; stima l'ordine di grandezza.* **Standard F**, Livello 2.11, *Riconosce il doppio significato della divisione.* **Standard F**, Livello 4.9 *Calcola algoritmi con la calcolatrice anche con memoria.* **Standard G**, Livello 4.2, *Calcola operazioni con interi e razionali.* **Standard I**, Livello 1.2 *Confronta prezzi; ordina numeri decimali.* **Standard L**, Livello 4.22. *Legge, scrive, rappresenta dati espressi con naturali, decimali, interi, razionali, percentuali; converte in notazioni equivalenti; distingue dati assoluti e relativi.*

I numeri razionali

Partendo da osservazioni algebriche o geometriche si pone poi l'esigenza di definire un nuovo insieme di numeri (Es. "come è possibile dividere un numero per un altro?", "come dividere 5 per 7?", "come trovare un numero che moltiplicato per 2 dia 3 ?",...): i numeri razionali ; il filo conduttore è quello di introdurre ogni insieme di numeri come ampliamento del precedente.

I numeri razionali possono essere definiti come i precedenti interi definendo un'opportuna relazione di equivalenza. Anche in questo caso, come per i numeri naturali, il docente valuterà se introdurre da subito il concetto utilizzando la definizione di equivalenza o utilizzando un linguaggio almeno inizialmente un linguaggio più intuitivo.

Consideriamo le coppie di numeri (x, y) tali che x appartenga ai numeri naturali e y ai numeri naturali tranne lo zero, per esse definiamo la seguente relazione di equivalenza

$(a, h) R (b, k) \Leftrightarrow a \cdot k = b \cdot h$ (cioè due coppie sono in relazione se il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei termini medi).

Possiamo costruire così l'insieme quoziente i cui elementi sono le classi di equivalenza; ad esempio prendiamo come rappresentanti della classe le coppie $(1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots$ ecc..

Rappresentante		Classe di equivalenza
$(1, 2)$	→	$[(1, 2)] = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\} = 1/2$
$(1, 3)$	→	$[(1, 3)] = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), \dots\} = 1/3$
$(1, 4)$	→	$[(1, 4)] = \{(1, 4), (2, 8), (3, 12), (4, 16), \dots\} = 1/4$
ecc.....		
$(2, 1)$		
$(2, 2)$		
$(2, 3)$		

Nasce così l'insieme dei numeri razionali assoluti e come si sono introdotti i numeri interi relativi allo stesso modo possiamo introdurre i numeri razionali relativi.

La scoperta delle proprietà porterà ad evidenziare: Le operazioni (Risolto anche il problema della divisione se ne affaccia un altro ...la radice quadrata!!), L'esistenza dell'inverso, la relazione di ordine, Si richiameranno per darne una giustificazione alla luce della nuova definizione alcuni concetti già noti: numeri periodici, numeri decimali.

I numeri reali ²⁹

Per definire i numeri reali possiamo scegliere se utilizzare una via algebrica o geometrica:

a. Via algebrica

Partiamo da un problema magari anche facendo cenni al suo significato storico

"Possiamo esprimere $\sqrt{2}$ come un numero razionale?"

Utilizziamo la tecnica della dimostrazione per assurdo per dimostrare che non è possibile.

Se l'allievo non conosce la tecnica conviene soffermarsi sul suo significato e sul suo utilizzo a prescindere dallo specifico contesto

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard F, Livello 4.9 *Calcola algoritmi con la calcolatrice anche con memoria, Risolve problemi integrando dati, proprie conoscenze e competenze con altri;* **Standard L,** Livello 4.2 *Svolge ricerche e presenta i risultati usando modalità di rappresentazione proprie della matematica.*

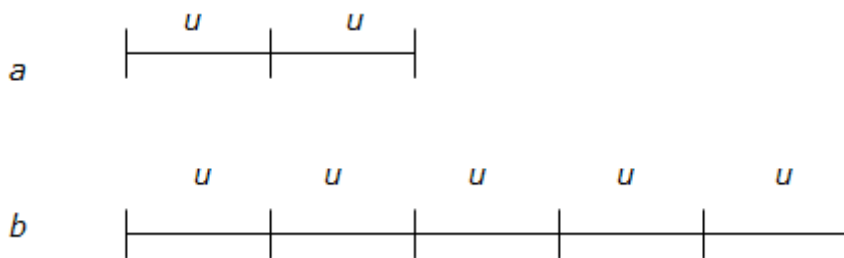
²⁹ Questo argomento viene inserito per dare completezza alla trattazione nel caso il docente ritenga di poter introdurre anche l'insieme numerico dei reali, nella consapevolezza che tale argomento non è né previsto né normalmente affrontato nella scuola dell'obbligo.

vogliamo (cioè che differiscano tra loro di un numero piccolo scelto a nostro piacimento). Tutte le volte che sono rispettate queste caratteristiche l'elemento separatore tra i due insiemi è un numero irrazionale.

b. Via geometrica

Questo approccio si presta particolarmente per essere introdotto attraverso un'attività di problem solving che partendo dall'osservazione dell'esistenza di segmenti che hanno "una parte comune" arriva a ipotizzare e a verificare che esistono anche segmenti che "non hanno una parte comune" e infine a definire il rapporto tra i secondi come un numero diverso dai precedenti, non identificabile con un razionale.

Per esempio si potrebbero considerare i due segmenti rappresentati in figura:



E' facile notare che essi contengono una "parte comune" (il segmento u) e possiamo dire che

$$a = 2 u$$

$$b = 5 u$$

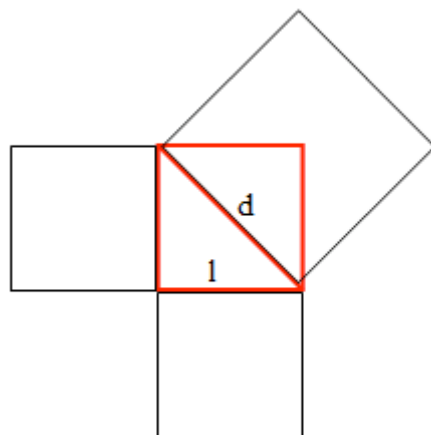
A causa di ciò i segmenti si dicono "commensurabili" e possiamo dire che due segmenti sono commensurabili se il loro rapporto è un numero razionale, infatti:

$$a/b = 2/5u$$

$$a/b = 2/5$$

Ma esistono segmenti incommensurabili? Cioè numeri non razionali? Si potrebbero richiamare anche gli studi dei Pitagorici che dapprima credevano che tutti i segmenti fossero commensurali e composti da piccole unità/corpuscoli dette monadi salvo poi scoprire la falsità di una simile teoria

La risposta è sì, mostriamo, ad esempio, che la diagonale di un quadrato e il suo lato sono incommensurabili.



Sia 1 la misura del lato del quadrato e d la sua diagonale. Grazie al teorema di Pitagora possiamo dire

$$1 + 1 = 2 = d^2$$

Supponiamo che $d = p/q$ con p e q primi fra loro e q diverso da 0 .

Otteniamo

$$2q^2 = p^2$$

questo ci dice che p^2 è un numero pari, ma allora anche p è pari perché se fosse dispari il suo quadrato sarebbe dispari, quindi possiamo scrivere $p = 2n$.

Sostituendo

$$2q^2 = (2n)^2$$

$$2q^2 = 4n^2$$

$$q^2 = 2n^2$$

Cioè q deve essere pari. Assurdo perché avevamo supposto che p e q fossero primi fra loro.

Abbiamo quindi dimostrato che la diagonale di un quadrato e il suo lato sono segmenti incommensurabili.

E non si può trovare un numero razionale il cui quadrato che valga esattamente 2 possiamo però trovare dei numeri razionali il cui quadrato sia molto vicino a 2

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61
	<2	<2	<2	<2	>2	>2	>2	>2	>2

Il numero il cui quadrato fa 2 sta qua

Ripetiamo lo stesso procedimento per l'intervallo [1.4 , 1.5]

x	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49
x^2	1,9881	2,0164	2,0449	2,0736	2,1025	2,1316	2,1609	2,1904	2,2201
	<2	>2	>2	>2	>2	>2	>2	>2	>2

Il numero il cui quadrato fa 2 sta qua

Ripetiamo lo stesso procedimento per l'intervallo [1.41 , 1.42]

X	1,411	1,412	1,413	1,414	1,415	1,416	1,417	1,418	1,419
X^2	1,9909 21	1,9937 44	1,9965 69	1,9993 96	2,0022 25	2,0050 56	2,0078 89	2,0107 24	2,0135 61
	<2	<2	<2	<2	>2	>2	>2	>2	>2

Il numero il cui quadrato fa 2 sta qua

Ripetiamo lo stesso procedimento per l'intervallo $[1.41, 1.42]$

Abbiamo la seguente tabella di valori approssimati

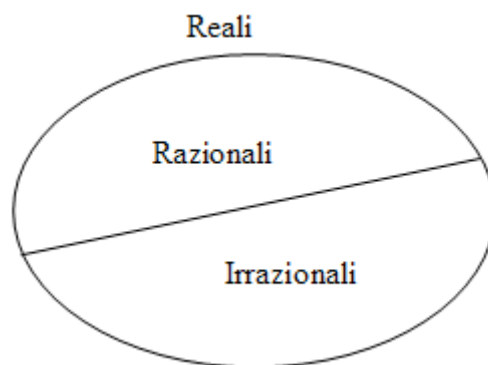
Per difetto	1	1,4	1,41	1,414
Per eccesso	2	1,5	1,42	1,415

Possiamo definire delle "scatole cinesi" così

$[1, 2]$ $[1,4, 1,5]$ $[1,41, 1,42]$ $[1,414, 1,415]$ $[... ..]$

Cosa c'è dentro la "scatola cinese"? Un numero che non è razionale e che chiameremo irrazionale.

Abbiamo così definito un nuovo insieme di numeri i numeri reali \mathbb{R}



Per completare la trattazione occorre far vedere che per i nuovi numeri (siano essi stati definiti come classi contigue o come scatole cinesi) valgono tutte le proprietà algebriche note:

esistenza di operazioni (addizione e moltiplicazione) con le proprietà relative relazione di ordine.

Dal processo attivato si possono prevedere che alcuni possibili effetti formativi come: Il docente deve sottolineare l'aspetto della rigosità della matematica e deve sottolinearne l'aspetto formativo

Possibili collegamenti/approfondimenti con altri aspetti della matematica possono essere:

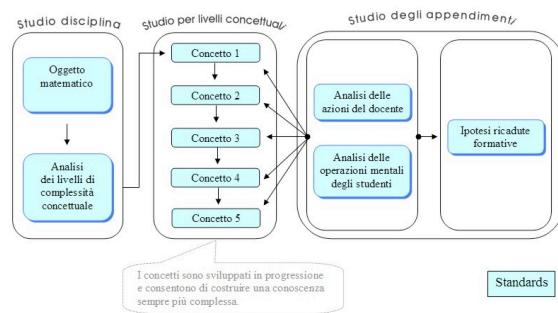
interessante sarebbe far vedere la corrispondenza biunivoca che esiste tra retta orientata e numeri reali per arrivare alla retta numerica. Attenzione che per introdurre rigorosamente questo concetto abbiamo bisogno del postulato della continuità della retta;

altro aspetto interessante potrebbe essere la numerabilità dei numeri naturali e razionali e la non numerabilità dei numeri reali. Potrebbe essere interessante, ma sicuramente non facile mostrare che esistono "tipi diversi di infinito" e che si possono confrontare!!

Possibili approfondimenti interdisciplinari. La rappresentazione di un numero in calcolatore partendo ad esempio da una domanda provocatoria del tipo " Possiamo memorizzare un numero reale nella memoria di un calcolatore?"

5.3 Operatori logici

Con esempi tratti dal linguaggio comune si affrontano le proposizioni, le operazioni con le proposizioni, le tabelle di verità, offrendo la possibilità di richiamare una pluralità di altri concetti attinenti. Quindi si esemplifica l'uso degli operatori logici proponendo uno studio sulle ricerche in Internet.



Contenuti

Concetto di proposizione

Partendo da una serie di frasi di uso comune ("Piove", "Il cane è un mammifero", "12 è multiplo di 7", "1+1=2", "In auto bisogna tenere la destra", "Passami una matita per cortesia", "Il colore rosso è bello", "Paolo è simpatico"...), stimolare l'osservazione da parte degli allievi per arrivare alla definizione di proposizione come frase di cui è possibile esprimere un valore di verità osservando come di alcune frasi possiamo dire se sono vere o false e di altre no. Occorre anche far notare l'importanza del contesto

("Piove" dove? dove siamo noi o a Roma?, "1+1=2" se siamo in base 10, in base 2?, "In auto bisogna tenere la destra" nel Regno Unito?, e in Italia?) e soffermarsi su come basti un contro-esempio per dimostrare rigorosamente che una proposizione è falsa, ma non basti un esempio per dimostrare che una proposizione è vera. In questa fase si può arrivare alla definizione di quantificatore esistenziale e di quantificatore universale. È bene far notare che quando ragioniamo organizziamo i nostri pensieri: pensare a ruota libera è un'attività diversa dal ragionare logicamente.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard L, Livello 1.2 Distingue informazioni qualitative e quantitative, semplici analogie e differenze, Livello 1.10 Descrive oralmente, il linguaggio naturale, situazioni ed eventi. Livello 1.11 Reperisce, annota informazioni da spiegazioni e racconti orali; Standard M, Livello 1.9. Analizza farsi e proposizioni matematiche; distingue farsi vere e false, affermative e negative, connettori logici; Standard L, Livello 2.1. Esegue e formula istruzioni verbali Standard L, Livello 4.2. Applica ragionamenti di tipo deduttivo, Livello 4.7. Studia la situazione problematica presentata, analizza, valuta e utilizza la documentazione fornita.

L'insegnante dovrebbe invitare l'allievo a non avere fretta di rispondere o di pensare ad una risposta, aiutarlo a sforzarsi di pesare ogni parola sua e dei compagni, a mettere in dubbio, a cercare contro-esempi che possano smontare convinzioni apparentemente inattaccabili. Quindi stimolare la discussione ragionata, che partendo da affermazioni cerca di comprenderle, smontarle per confermarle o confutarle. Per fare ciò il docente deve utilizzare "il condizionale" con domande del tipo: "cosa succedrebbe invece se..", "e se accadesse che ..", "cosa penseresti se ti dicessero che..." e lavorare su esempi forniti dagli allievi. Fondamentale è anche non entrare in discussioni di merito, valoriali; la matematica è neutrale, una proposizione non è vera o falsa in base al fatto che sia buona o cattiva, ma in base a considerazioni oggettive in un contesto definito.

Operazioni con le proposizioni

Le operazioni vanno introdotte attraverso esempi, introducendo le operazioni una alla volta e dedicando ad ognuna di esse più di un esempio. In particolare occorrerà soffermarsi sull'implicazione e la coimplicazione, che non sono facilmente e immediatamente comprensibili. Occorre tener presente che anche l'"e" e l'"o" nella lingua parlata hanno significati non sempre riconducibili all'"and" e all'"or".

A	b	NOT a	a AND b	a OR b	a EXOR b	a \rightarrow b	a \leftrightarrow b
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Lo studente: Interpreta e comprende le regole che governano le varie operazioni?

Per ciò il docente deve coinvolgere lo studente, accettando proposte, applicando le operazioni a proposizioni scaturite dagli allievi. Andrà posto sempre l'accento sul ruolo neutro della matematica, non viene valutata la bontà o meno di un'affermazione, ma la correttezza di un ragionamento.

Tablelle di verità

Per analogia con le operazioni numeriche o insiemistiche possono essere introdotte le espressioni logiche e il calcolo del loro valore di verità. Si possono introdurre i concetti di tautologia (risultato sempre vero qualunque sia il valore di verità degli operandi), contraddizione (risultato sempre falso qualunque sia il valore di verità degli operandi) e di proposizioni logicamente equivalenti (risultato uguale per stessi valori delle variabili proposizionali di partenza).

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard L, Livello 1.11 *Reperisce, annota informazioni da spiegazioni e racconti orali.* **Standard M**, Livello 1.9 *Analizza farsi e proposizioni matematiche; distingue farsi vere e false, affermative e negative, connettori logici.* **Standard L**, Livello 4.2, *Applica ragionamenti di tipo deduttivo.* Livello 4.7 *Studia la situazione problematica presentata, analizza, valuta e utilizza la documentazione fornita.*

Lo studente: E' consapevole della tecnica applicata? Riconosce il significato del risultato conseguito?

Gli esempi saranno il punto di partenza per l'introduzione dei concetti, si stimoleranno gli allievi a verificare le proprie conoscenze con esempi diversificati, a volte sfruttando anche proposte apparentemente contraddittorie.

Ricerche in internet

Uno degli utilizzi ricorrenti degli operatori logici è la ricerca in internet. Tutti i browser più utilizzati permettono accanto alla ricerca standard, la ricerca avanzata che permette di centrare meglio l'obiettivo puntando non solo sulla presenza di una parola chiave, ma su espressioni logiche che coinvolgono più di una parola. Una cosa che deve essere chiara è che questo è un tipico esempio dell'utilizzo da parte di altre discipline (informatica nella fattispecie) della matematica e questo è di per sé formativo in quanto permette di evidenziare l'importanza della disciplina che stiamo esaminando. Questo permette anche di recuperare in "rigorosità", rigorosità non sempre rispettata nella lingua parlata e offre l'occasione per far vedere che anche in contesti linguistici quando occorre essere rigorosi si fa ricorso alla matematica.

Riferimenti agli Standard.
Area scientifica, Standard L,
 Livello 4.2 *Applica ragionamenti di tipo deduttivo,*
 Livello 4.7 *Studia la situazione problematica presentata, analizza, valuta e utilizza la documentazione fornita.*

Lo studente: Individua le parole chiave indicate per la ricerca che vuole effettuare? Formula l'interrogazione e sfrutta le risposte per mirare meglio le ricerche successive? Esprime correttamente e rigorosamente la propria ricerca sia in termini matematici che a parole? Legge i risultati ottenuti per orientare le ricerche successive?

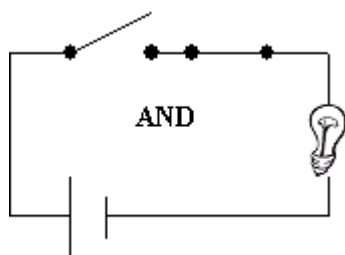
A tal fine l'insegnante dovrà guidare l'allievo alla scoperta dell'applicazione dei concetti matematici appresi sottolineando nei vari passaggi quali operazioni si sono applicate, deve stimolare il confronto tra la classe o il gruppo di lavoro e deve far in modo che il tentativo e l'improvvisazione non trovino spazio, ogni ricerca deve essere discussa e valutata prima di essere effettuata. Tutti sappiamo che nella fretta o nella distrazione del momento il tentativo troverà spazio nel nostro operato, ma uno degli aspetti formativi della matematica è capire che essa ci dà gli strumenti per eliminarli e per seguire strade sicure e spesso ci tornerà molto utile!!

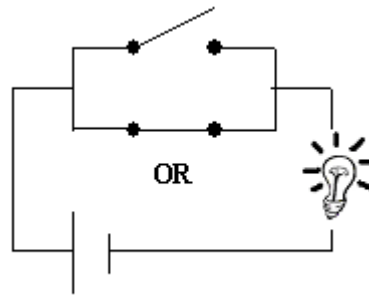
Possibili collegamenti/approfondimenti con altri aspetti della matematica possono essere:

- analogie con le operazioni tra insiemi
- regole di ragionamento (modus ponens, modus tollens)

Possibili approfondimenti interdisciplinari: circuiti logici.

E' facile e anche significativo il collegamento con circuiti in serie e parallelo per mostrare ad esempio come l'accensione di una lampadina venga pilotata con uno dei circuiti citati. Si potrebbe poi parlare delle differenze/analogie tra circuiti elettrici e telefonici, etc...

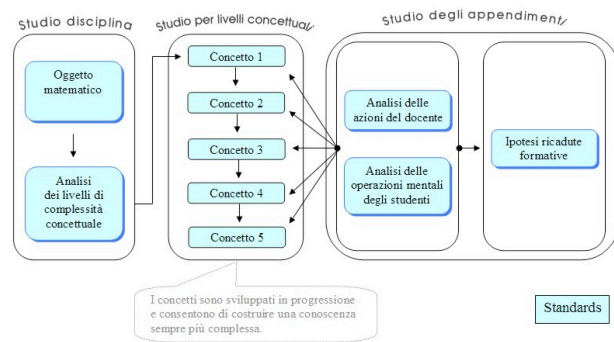




Anche per le ricerche nei data base, access, ad esempio, utilizza gli operatori logici nel campo criteri delle query, nei report.

5.4 Ordinare e catalogare

La sequenza dei concetti proposti in questa unità conduce dopo una l'iniziale spiegazione del concetto di relazione, alla proprietà delle relazioni, alla relazione di equivalenza e insieme quoziente, quindi alla relazione d'ordine. Anche in questo caso esemplificazioni grafiche ed esempi suggeriscono la spiegazione di concetti secondari.



Contenuti

Il concetto di relazione

Partendo dagli insiemi di oggetti far osservare che esistono modi di associarli tra loro mediante determinate regole (tra persone le relazioni "essere fratello/sorella di", "essere madre di", "essere sposato con", tra numeri interi "essere il successivo di", "essere primo con", ...), definire poi la relazione e alcuni termini comuni (immagine, contro-immagine, dominio, condominio, relazione uno a uno, relazione molti a uno, relazione molti a molti...).

Lo studente: Riconosce nel linguaggio comune termini che riconducano ad una possibile relazione? Analizza il contesto e definisce la relazione stessa? Presta attenzione ai termini utilizzati? Ascolta e analizza gli esempi dei compagni rivolgendo loro domande esemplificative?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard I, Livello 3.3 *Classifica, valuta e sceglie facendo riferimento a più criteri di classificazione, Standard L, Livello 1.7, Riconosce relazioni e quantità espresse con parole, locuzioni, schemi (alcuni/tutti, parte/tutto, totale, aumento, diminuzione,..).*

L'insegnante proporrà inizialmente esempi sui quali innescare la discussione e favorire, poi, la proposta di esempi da parte degli stessi allievi, facilitando il confronto e l'ascolto. Curare e guidare gli allievi verso un modo rigoroso di esprimere le loro opinioni o idee.

Come rappresentare una relazione

Esaminare sempre attraverso esempi diverse modalità di rappresentare una relazione: per elencazione sagittale, cartesiana, tramite tabella, tramite grafo.

Molte delle rappresentazioni sopra citate sono ricorrenti in quotidiani, telegiornali, istruzioni di montaggio, ect...quindi conviene partire da quelle per evidenziarne le caratteristiche e le peculiarità, arrivando poi alla conversione da un tipo all'altro e da ultimo alla rappresentazione delle relazioni di cui si è discusso in precedenza scegliendo tra le rappresentazioni note quella opportuna al contesto di utilizzo. Non è necessario introdurre tutte le modalità indicate, ma ritengo indispensabile dare allo studente più di una modalità di rappresentazione

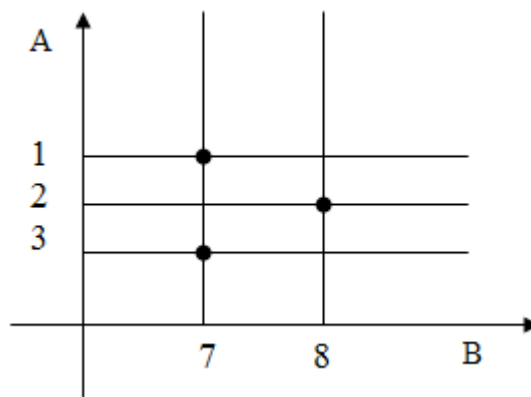
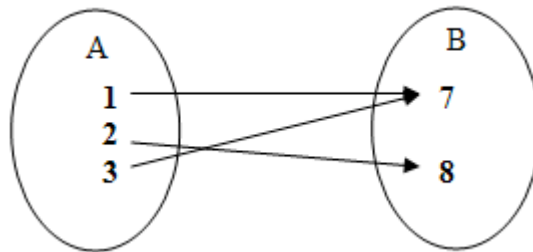
Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard I, Livello 4.18, Ragiona evidenziando relazioni e sa schematizzarle graficamente. Livello 4.22 *Svolge ricerche e presenta i risultati usando modalità di rappresentazione proprie della matematica.*

Esempio: Dati gli insiemi $A\{1,2,3\}$ $B\{7,8\}$ rappresentare la relazione

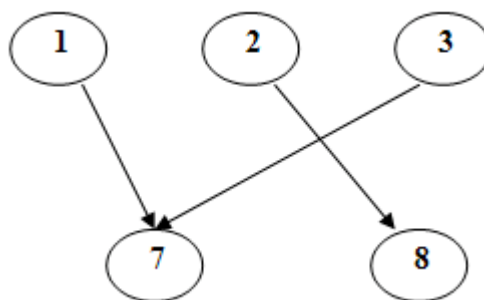
$R = \{(x,y) \in A \times B : x+y \text{ sia pari} \}$

(Se non sono note le simbologie utilizzate sarà opportuno porre il problema in termini discorsivi)

$R = \{(1,7), (2,8), (3,7)\}$



	7	8
1	*	
2		*
3	*	



Per ogni rappresentazione sarà utile mettere in evidenza anche graficamente gli elementi "notevoli": dominio, condominio, immagine e contro-immagine di un elemento.

Lo comprende le modalità di rappresentazione, le confronta, ne evidenzia le differenze, le analogie e le peculiarità. Impara a convertire una rappresentazione in un'altra e sceglie la migliore rappresentazione in base al contesto.

Mentre l'insegnante conduce l'allievo in modo graduale ad evidenziare ogni aspetto utile delle varie rappresentazione per ottenere padronanza dello strumento.

Proprietà delle relazioni

Per introdurre le proprietà si potrebbe partire da alcuni esempi di rappresentazioni per arrivare solo in un secondo tempo ad una definizione formale.

Ad esempio: nella rappresentazione cartesiana se tutti i punti della diagonale del primo quadrante appartengono alla relazione significa che ogni elemento è in relazione con se stesso e cioè che la relazione è riflessiva, se nessun punto della diagonale del primo quadrante appartiene alla relazione significa che nessun elemento è in relazione con se stesso e cioè che la relazione è antiriflessiva, se i punti appartenenti alla relazione sono simmetrici rispetto alla diagonale del primo quadrante significa che la relazione è simmetrica

Mentre nella rappresentazione sagittale se e solo se da ogni punto parte una freccia che ritorna nel punto stesso la relazione è riflessiva, se e solo se da nessun punto parte una freccia che ritorna nel punto stesso la relazione è antiriflessiva, se esiste una freccia che da un punto x va in un punto x' la relazione sarà riflessiva se e solo se esiste anche una freccia che da x' va in x , se esiste una freccia che da x va in x' e una freccia che da x' va in x'' la relazione sarà transitiva se e solo se esiste anche una freccia che da x va in x'' .

L'allievo Svolge ricerche e presenta i risultati usando modalità di rappresentazione proprie della matematica (4.22): riflessiva, antiriflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva. Per fare ciò deve dapprima capire le caratteristiche che possono avere le relazioni limitandosi ad osservare criticamente le rappresentazioni, poi deve classificare queste caratteristiche cioè vedere che alcune hanno qualcosa in comune. Da ultimo deve evidenziare queste caratteristiche arrivando ad una definizione rigorosa della proprietà ed essere in grado data una relazione di ricercarne eventuali proprietà.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard Livello 1.3. *Conta, raccoglie, ordina risposte ed informazioni con un criterio; rappresenta con insiemi o schemi grafici informali; definisce caratteristiche con nomi collettivi.* Livello 1.7, *Riconosce relazioni e quantità espresse con parole, locuzioni, schemi (alcuni/tutti, parte/tutto, totale, aumento, diminuzione,..).* **Standard I** Livello 2.2 *Riconosce quantità e relazioni espresse con locuzioni (pari a, almeno, minimo/massimo, minore/maggiore) e simboli matematici ricorrenti; confronta dati relativi a sottoinsiemi.* Livello, 2.7 *Confronta dati espressi con numeri naturali e individua minimi, massimi, intuitivamente valori medi.* **Standard I**, Livello 4.18. *Ragiona evidenziando relazioni e sa schematizzarle graficamente.*

Anche in questo caso il docente dovrebbe essere un "sapiente" accompagnatore: sapiente perché deve in ogni istante essere in grado di prevedere dove si può andare a finire ed essere in grado di correggere la traiettoria, accompagnatore perché non deve trascinare contro la sua volontà l'allievo (trasmettere concetti anche se l'allievo non ha capito i precedenti), ma fare in modo che l'allievo arrivi agli obiettivi con consapevolezza e con sforzi propri.

Relazione di equivalenza e insieme quoziente

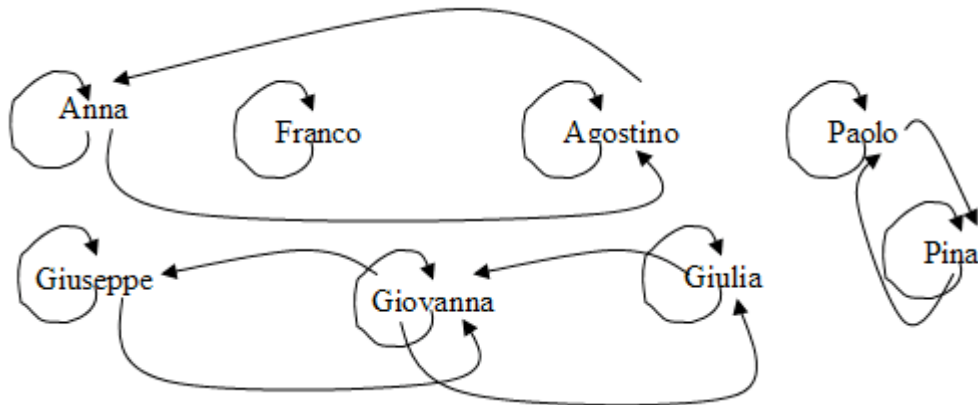
Classifica secondo criteri diversi; aggrega e disaggrega dati parziali ricavandone ulteriori (4.6)

Nell'ambito delle attività svolte dagli essere umani quella di classificare ricopre un ruolo importante, non solo nelle attività domestiche (sistemare in modo non casuale i libri nella libreria ci consentirà di ritrovarli tempestivamente), ma anche nelle attività lavorative: in campo scientifico ad esempio le specie animali e vegetali, in campo economico ad esempio per classificare le varie tipologie di società. Ci consente di riconoscere informazioni o oggetti come facenti parte di un gruppo, di riconoscerli in base a caratteristiche che peculiari, di ricordarli meglio. Partendo da un esempio il docente farà emergere le caratteristiche di una relazione di equivalenza che poi estenderà ad altri esempi per arrivare alla definizione. Quando consideriamo una relazione di equivalenza abbiamo la possibilità di ragionare in termini più astratti perché possiamo pensare all'insieme delle classi di equivalenza. Questo in matematica è un procedimento importante perché corrisponde ad un processo mentale molto frequente: quello di formare concetti nuovi per astrazione da concetti semplici. Ad esempio quando parliamo di nazionalità ed affermiamo che due persone completamente differenti hanno al stessa nazionalità intendiamo affermare che quelle due persone rispetto alla relazione " essere nati nella stessa nazione " sono equivalenti. Esempio: Sia dato l'insieme di nomi di persona: $A = \{ \text{Anna, Franco, Agostino, Paolo, Pina, Giulia, Giovanna, Giuseppe} \}$ e la relazione in base alla quale due nomi sono in relazione se iniziano con la stessa lettera dell'alfabeto.

Se rappresentiamo tale relazione ad esempio attraverso un grafico sagittale:

Riferimento agli Standard dell'Area scientifica. Standard G, Livello 2.3. *Trova criteri di classificazione, in semplici casi concreti; rappresenta con schemi grafici il modello di classificazione.* **Standard G**, Livello 4.8, *Ordina, cataloga, inventaria libri, riviste, documenti, materiali.* **Standard I**, Livello 3.3. *Classifica, valuta e sceglie facendo riferimento a più criteri di classificazione.* **Standard L**, Livello 1.3, *Conta, raccoglie, ordina risposte ed informazioni con un criterio; rappresenta con insiemi o schemi grafici informali; definisce caratteristiche con nomi collettivi.* **Standard I** Livello 3.4 *Definisce, raggruppa, sintetizza dati seguendo un modello o un criterio predefinito.*

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard G, Livello 2.1. *Legge, individua parole da insiemi ordinati di tipo numerico, alfabetico, cronologico, logico (elenchi telefonici, agende, calendari, appunti).* Livello 2.2 *Colloca parole in ordine numerico, alfabetico, cronologico;* livello 2.3, *Trova criteri di classificazione, in semplici casi concreti; rappresenta con schemi grafici il modello di classificazione.* **Standard G**, Livello 4.8 *Ordina, cataloga, inventaria libri, riviste, documenti, materiali.* **Standard L**, Livello 1.3. *Conta, raccoglie, ordina risposte ed informazioni con un criterio; rappresenta con insiemi o schemi grafici informali; definisce caratteristiche con nomi collettivi.* Livello 4.22, *Svolge ricerche e presenta i risultati usando modalità di rappresentazione proprie della matematica.*



Possiamo vedere che tale relazione gode delle seguenti proprietà simmetrica, riflessiva, transitiva.

Questo ci permette di costruire degli insiemi mettendo in ognuno di essi i nomi che iniziano con la stessa lettera:

{Franco}

{Giulia, Giovanna, Giuseppe}

{Anna, Agostino}

{Paolo, Pina}

Questi insiemi (disgiunti e non vuoti) sono le classi di equivalenza che costituiscono una partizione dell'insieme iniziale che da origine all'insieme quoziente. Vista l'importanza del concetto che si presenta sarà opportuno sia mostrare più esempi, sia controesempi che evidenzino come in altri casi (relazioni non di equivalenza) non sia possibile determinare una partizione. Si potrà risalire all'esempio iniziale (delle scatole) per mostrare come diverse delle proposte fornite rappresentavano relazioni di equivalenza ed evidenziare come la scelta della più opportuna dipenda dal contesto.

A seconda delle conoscenze pregresse degli allievi si potranno fare esempi afferenti ad altri ambiti della matematica: isometria, uguaglianza (si può insistere sul fatto che l'uguaglianza è una particolare relazione di equivalenza, ma che i termini non sono sinonimi), parallelismo, equivalenza tra figure, i numeri, aritmetica del finito.

Lo studente: Coglie l'importanza della matematica anche in un'operazione apparentemente "naturale" come la classificazione?

Il docente da canto suo deve evidenziare come un opportuno e consapevole utilizzo dello strumento possa venire in aiuto in casi più difficili o comunque in situazioni lavorative dove il nostro lavoro dovrà poi essere utilizzato o da noi stessi in un secondo tempo o da altri.

Relazione d'ordine

Una volta catalogate o anche in assenza di una catalogazione preventiva un'altra operazione che ci aiuta nella ricerca di una determinata informazione o oggetto è l'ordinamento. Pensiamo alla banale ricerca in un elenco telefonico (perché se cerco, ad esempio Merli Antonio apro istintivamente il volume verso la metà circa? E perché non mi metto a sfogliare le pagine una alla volta alla ricerca del

nominativo?) e comunque a tutte quelle situazioni che mi costringono ad avere a che fare con una grande mole di dati o di oggetti.

Sempre, come sopra, partendo da esempi introdurrei relazioni di ordine totale e parziale invitando gli allievi a fare osservazioni per arrivare in base a quelle ad una definizione rigorosa come relazione che gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Vanno inoltre introdotti a questo punto i concetti di massimo, minimo, precedente e successivo.

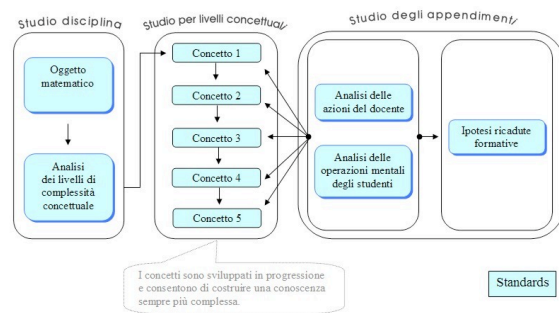
Lo studente: Coglie l'importanza della matematica in operazioni di ordinamento?

Ritengo importante dare libertà agli allievi di rivisitare il proprio operato quotidiano alla luce di quanto appreso per evidenziare relazioni di equivalenza e di ordine condividendo le proprie esperienze con gli altri, cercando di discutere sulle scelte fatte e sui vantaggi ottenuti.

Possibili collegamenti/approfondimenti con altri aspetti della matematica possono essere: il concetto di funzione, relazioni di equivalenza notevoli, congruenza modulo n (giorni della settimana, ore dell'orologio, ..), relazione di equipollenza tra segmenti orientati che porta alla definizione di vettori liberi come classi di equivalenza.

5.5 Probabilità e statistica

A partire dalla statistica descrittiva, con esempi presi dal reale, si introducono concetti semplici che necessitano di pochi prerequisiti, si utilizzano vari strumenti di rappresentazione e si sviluppano i concetti di media, frequenza relativa e percento, la probabilità, la probabilità condizionale. Si prosegue presentando un esempio di verifica di una ipotesi statistica e l'illustrazione della nozione di campione distorto.



Primi concetti di statistica descrittiva

I concetti devono essere introdotti partendo da una rilevazione di dati vicina agli interessi dei soggetti informazione. Ad esempio: partire da un insieme disordinato di dati per fare una serie di domande stimolo:

- se ordiniamo gli elementi cosa possiamo osservare?
- qual è il più piccolo? e il più grande?
- ci sono valori che compaiono più volte?
- altre osservazioni qualitative...

Far capire che a volte non è utile avere a disposizione tutti i valori quanto piuttosto raggrupparli in gruppi, in intervalli. Arrivare poi ad una loro rappresentazione grafica, ad esempio attraverso un istogramma, far capire che a volte non interessa il numero assoluto dei dati compresi nei vari intervalli, bensì la loro proporzione relativa. Si arriva così alle frequenze, alla mediana, a quartili, quintili, decili e simili.

Lo studente: Osserva, senza lasciarsi condizionare dal significato dei dati, ma concentrandosi sui loro valori? Coglie significato delle rappresentazioni e le loro peculiarità? Sceglie tra le rappresentazioni conosciute quella più significativa per il contesto da rappresentare?

Il concetto principale da trasmettere è che una massa grezza di dati è di per sé poco significativa, occorre darle una struttura perché possa diventare espressiva. Il docente deve stimolare

Riferimenti agli Standard. Area scientifica,
Standard A, Livello 3.3, legge grafici con scale (istogrammi, cartesiani) e aerogrammi, Livello 3.8, sintetizza graficamente con tabelle, istogrammi e calcoli dati di campioni ristretti (classe, famiglia...).
Standard A, Livello 4.1, comprende il significato di termini statistici come campione di riferimento, popolazione, media, moda, Livello 4.11, rappresenta, calcola rapporti e indici con percentuali. **Standard E**, Livello 4.10, Sa costruire tabelle a doppia entrata, disegnare grafici cartesiani (temperatura, peso...) e aerogrammi, trasferire dati da testi a tabelle a grafici e viceversa; valutarne andamento; Livello 4.15, Comprende il significato, calcola medie, mode, mediane; sa valutarne vantaggi e limiti nell'analisi di statistiche. **Standard H**, Livello 3.11, Legge ideogrammi, istogrammi, aerogrammi, **Standard H**, Livello 4.19 Interpreta dati in articoli, tabelle, grafici; li utilizza per esprimere, confrontare opinioni e scelte. **Standard L** Livello 1.3, Conta, raccoglie, ordina risposte ed informazioni con un criterio; rappresenta con insiemi o schemi grafici informali; definisce caratteristiche con nomi collettivi; **Standard L**, Livello 2.3, Su esplicita consegna, seleziona dati tra pochi distrattori da testi, elenchi, istogrammi, tabelle, aerogrammi riguardanti immagini anagrafiche limitate a gruppi ristretti; **Standard L**, Livello 3.11, Confronta percezioni di senso comune con dati statistici (es. rapporto maschi/femmine in diverse età; numero di immigrati in Italia ed Europa); **Standard L**, Livello 4.22, Svolge ricerche e presenta i risultati usando modalità di rappresentazione proprie della matematica.

il ragionamento per la ricerca ragionata di tale struttura e poi dare gli strumenti per analizzare i dati stessi. Per la rappresentazione il docente può utilizzare tabelle o grafici cartesiani a seconda del contesto e delle conoscenze pregresse. Questo risulta ininfluente per i concetti qui esposti, ma può invece essere significati per mostrare agli allievi utilizzi alternativi di strumenti già noti.

La media, frequenza relativa e percento

Si può introdurre la media con un classico giochino: data una serie di numeri dovendo scommettere su uno di essi con una vincita che varia in base alla differenza tra il numero uscito e quello su cui si è scommesso, quale numero conviene scegliere? In prima battuta si potrebbe pensare alla mediana, che si rivela però meno adatto di un valore rispetto al quale gli scarti risultino meglio equilibrati. Tale valore è la media: esso è il valore che dovrebbero avere i dati, se fossero uguali tra loro, per dar luogo alla stessa somma totale che danno i dati attuali. Conviene soffermarsi sulla differenza tra media e mediana, su cosa accade se mutano alcuni elementi tra i dati.

L'obiettivo da raggiungere invece con l'introduzione della frequenza e del percento è quello di comprendere esattamente cosa vuol dire che una certa frazione di individui di un certo tipo possiede un'ulteriore data proprietà e maneggiare correttamente le percentuali. Si potrebbero introdurre problemi del tipo: "Un datore di lavoro propone ai lavoratori di ridurre il salario del 15% e subito dopo di applicare al nuovo salario un aumento del 17%. Fanno bene ad accettare?" "In un Paese, il 60% dei malati di mente sono insegnanti. E' esatto dire che la maggior parte degli insegnanti sono matti?" "Alle ultime elezioni un partito è passato dal 34,4% al 30,4% dei voti. E' corretto dire che ha perso il 4% dei propri voti o che ne ha persi il 11,6%? Ed è invece corretto dire che il calo ha riguardato il 4% del totale del corpo elettorale?".

Lo studente Comprende concetti e terminologie? Calcola correttamente gli indici presentati? Valuta i risultati confrontandoli con gli altri e sostenendoli con opportune argomentazioni logico-deduttive?

Occorre non sottovalutare la difficoltà del concetto di media che è un valore fittizio. Il valore che ne deriva può essere in alcuni casi facilmente interpretato, ad esempio se si tratta di redditi, ma in altri può non essere così immediato. La frequenza e la percentuale sono termini diffusi e spesso utilizzati per esprimere convinzioni o opinioni, è quindi importante che il docente fornisca una rigorosa chiave di lettura di tali termini, partendo da esempi presi dalla vita quotidiana che possano innescare interpretazioni distorte sulle quali aprire la discussione e il

Riferimenti agli Standard. Area scientifica,
Standard A, Livello 4.1, *Comprende il significato di termini statistici come campione di riferimento, popolazione, media, moda*, Livello 4.4 *Calcola medie, mode mediane*, Livello 4.11, *Rappresenta, calcola rapporti e indici con percentuali*; **Standard E**, Livello 4.10, *Sa costruire tabelle a doppia entrata, disegnare grafici cartesiani (temperatura, peso..) e aerogrammi, trasferire dati da testi a tabelle a grafici e viceversa; valutarne andamento*; Livello 4.15, *Comprende il significato, calcola medie, mode, mediane; sa valutarne vantaggi e limiti nell'analisi di statistiche*. **Standard L**, Livello 3.9 *Individua valori medi, frequenze e campi di variazione, calcola medie di rilevanza demografica (età media, classi di età..)*, Livello 3.10, *Compila tabelle di frequenza.*; **Standard L**, Livello 4.9, *Individua e calcola medie, mode e mediane*.

confronto e, naturalmente, con le quali arrivare al significato chiaro delle affermazioni.

La probabilità

L'obiettivo è l'apprezzamento qualitativo della gradazione di incertezza propria di un evento casuale e la definizione intuitiva di probabilità per poi passare ad una sua definizione come rapporto. Si presenteranno varie situazioni di giochi (carte, monete, dadi, sacchetti con palline colorate) chiedendo agli allievi di prevedere risultati, di scommettere passando poi alle verifiche empiriche dei risultati e successivamente a tentativi di spiegazioni. Fatto ciò si introdurrà la probabilità come rapporto riconoscendo ed enumerando la casistica in semplici situazioni. Gli esempi presentati saranno via via più complessi, ad esempio verranno introdotte in un secondo tempo le estrazioni ripetute. Per le estrazioni ripetute si potrebbe pensare di impiegare i grafi come strumenti di rappresentazione e semplificazione di eventi aleatori relativamente complessi e allo stesso tempo facilitare il consolidamento delle capacità già messe in campo.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard E, Livello 4.16, *Calcola tassi percentuali, semplici rapporti di probabilità, legge/costruisce tabelle a doppia entrata ;indica probabilità di un evento con frazioni e percentuali*; **Standard L**, Livello 4.13, *Identifica eventi probabili, impossibili, certi*; Livello, 4.14, *Identifica casi possibili e favorevoli*, Livello 4.15, *Riconosce eventi complementari ed eventi incompatibili*; Livello, 4.16, *Analizza la probabilità statistica di alcuni eventi che possono interessare la popolazione di un paese; confronta con le percezioni comuni*; **Standard M**, Livello 2.5, *In situazioni concrete di gioco riconosce e distingue gli eventi certi, probabili, impossibili*; Livello 2.6 *Intuitivamente valuta la diversa probabilità tra due eventi*; **Standard M**, Livello 3.4, *Concettualizza e calcola la probabilità di un evento come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili*, Livello 3.5, *Valuta la maggiore o minore probabilità che si verifichi un evento*; Livello 3.6, *Riconosce le notazioni con cui viene enunciata la probabilità*; Livello 3.7, *Conosce la differenza tra probabilità teorica e reale; analizza dati e individua probabilità statistica*, Livello 3.8, *Rileva probabilità di eventi incompatibili, compatibili, composti attraverso tabelle e schemi grafici*.

Lo studente: Individua i significati che possono essere sottesi ai dati? Valuta la dipendenza o meno da altri eventi? Enumera casi possibili? Usa la tecnica appresa in situazioni simili, ma non uguali a quelle viste?

Il docente darà largo spazio ad esperimenti effettivi, ma anche ad esperimenti mentali per costringere l'allievo ad immaginarsi la situazione riconoscendola ed enumerando tutti i possibili casi. E' comunque fondamentale che l'idea di probabilità diventi subito operativa. Gli esempi troveranno ispirazioni da un mondo fittizio (quello del gioco) perché nella realtà la probabilità è molto complicata e spesso condizionata da una serie complessa di variabili. In un secondo momento potrebbe essere utile far emergere in casi reali quali sono i condizionamenti che a volte ci impediscono di calcolare semplicemente la probabilità. Cercare di mettere in luce il collegamento probabilità-realtà vedendo la prima come una valutazione del verificarsi di un certo evento partendo dalle informazioni che ho o che posso procurarmi prima che si verifichi l'evento considerato (gioco d'azzardo).

Probabilità condizionale

A questo punto si dovrebbe passare a problemi che aggiungono altre informazioni ai dati cioè nei quali oltre ad una prima condizione di casualità se ne aggiungono altre che influiscono sul risultato finale. Il tutto introduce a problemi di stima che hanno una certa rilevanza nella statistica. Attraverso una serie di esempi si dovrebbe portare l'allievo a calcolare la probabilità di un evento sotto condizione calcolando prima la probabilità dell'evento con la condizione e dividendo poi per la probabilità della condizione.

Lo studente: Legge la realtà stabilendo le condizioni sotto le quali si possono verificare determinati eventi? Studia le probabilità in gioco combinandole opportunamente? Utilizza strumenti opportuni di rappresentazione della realtà?

Il docente deve facilitare la sedimentazione di tali competenze attraverso esempi che permettano un crescendo di difficoltà con la possibilità di riscontri alle decisioni prese e alle valutazioni effettuate. Si possono prendere anche semplici esempi dal reale: " Mia nonna, che ha 89 anni, guardando la pagina dei necrologi del quotidiano cittadino e vedendo che pochissime persone muoiono alla sua età, mentre spesso ci sono persone di 40 anni esclama: << E' più facile morire da giovani!!!! Guarda ci sono diversi quarantenni e nessun novantenne!!!!>>. E' corretta la deduzione della nonna? Quale errore ha commesso?"

Esempio di verifica di un'ipotesi statistica

Si vuole presentare una tecnica utilizzata nel mondo reale per avvalorare ipotesi (ad esempio la validità di prodotti per bambini o cosmetici) stimolando la capacità critica dell'allievo.

Il problema dal punto di vista statistico è : formulata un'ipotesi verificare (confermando o confutando) l'ipotesi su base statistica con dati disponibili, usando il calcolo delle probabilità.

Esempio: Per sapere se una certa crema per le rughe ha efficacia la si prova su alcune donne, annotando quanti di esse migliorano e quante no. Si confrontano poi i dati con quelli di un gruppo di persone non trattate e si cerca di capire se l'andamento del trattato è significativamente migliore del gruppo di controllo oppure se le differenze sono insignificanti.

Si potrà utilizzare una tabella a doppia entrata nelle cui caselle si riportano i dati relativi

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard L, Livello 1.2, *Individua domande per conoscere persone, oggetti, attraverso interviste, discussioni all'interno di un gruppo; distingue informazioni qualitative e quantitative, semplici analogie e differenze.* **Standard L**, Livello 2.3, *Su esplicita consegna, seleziona dati tra pochi distrattori da testi, elenchi, istogrammi, tabelle, aerogrammi riguardanti immagini anagrafiche limitate a gruppi ristretti;* Livello 2.11, *Distingue tra dati in esame e dati di esperienza, tra opinioni proprie e opinioni altrui.* **Standard** Livello 4.5, *Interpreta tabelle e grafici, anche con dati di grande ampiezza (popolazione mondiale nel tempo);* **Standard M**, Livello 4.8, *Conosce la legge dei grandi numeri; confronta percezioni comuni con probabilità teoriche e statistiche.*

	numero migliorate	numero non migliorate
trattate	3	1
non trattate	1	3

Per risolvere il problema si calcola la probabilità che risultati pari o migliori di quelli riconosciuti si ottengono per caso, se questa è più piccola (in genere del 5%) si accetta l'ipotesi altrimenti la si rifiuta (non perché sia falsa, ma semplicemente perché non la si considera sufficientemente dimostrata da dati statistici)

Se, per esempio, si considera una popolazione molto bassa di persone su cui sperimentare la crema (cosa che spesso accade) i risultati potrebbero essere quelli riportati in tabella. Da qui potremmo dedurre un'innegabile efficacia della crema, ma se si fanno accuratamente i conti si vede che la probabilità di ottenere per puro caso un'efficacia non inferiore a quella della crema è pari a $17/70 = 24,3 \%$, troppo grande per poter ritenere confermata l'ipotesi.

Lo studente: Analizza la situazione? Individua le variabili in gioco ed eventuali dipendenze? Definisce l'ipotesi da verificare? Rileva i dati e li verifica confutando o confermando l'ipotesi? Valuta ipotesi formulate da altri ripercorrendo l'analisi del proponente o scegliendo una diverse via d'indagine?

Il docente deve stimolare la capacità critica dell'allievo sempre nell'ottica costruttiva di capire dapprima l'ipotesi presentata e la modalità di verifica seguita, per poi concludere confermando l'ipotesi o confutandola o limitandola a situazioni particolari e non generalizzabili.

Campioni e sondaggi

L'obiettivo è quello di illustrare la nozione di campione distorto stimolando il senso critico degli allievi nei confronti delle affermazioni che spesso si trovano sulla stampa o si ascoltano nei telegiornali. Si introduce il problema con alcuni esempi che mettano in luce la distorsione del campione.

Esempio: si vuole fare un'indagine sulla lunghezza delle parole italiane. Dato che contare la lunghezza di tutte le parole di un vocabolario sarebbe troppo lungo si decide di sceglierne un campione. Un gruppo segue questa strada: da un articolo di giornale sorteggia a caso 10 parole e ne calcola la lunghezza media. Un altro gruppo segue invece questa strada: sceglie a caso 10 lettere e conta poi per ciascuna lettera la lunghezza della parola in cui è compresa e poi fa la media dei 10 valori.

C'è diversità tra i valori trovati?

Se ripetiamo lo stesso esperimento con altre parole e altre lettere, ma sempre con gli stessi metodi cosa otteniamo?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard H, Livello 4.19. *Interpreta dati in articoli, tabelle, grafici; li utilizza per esprimere, confrontare opinioni e scelte; Standard L* Livello 1.2, *Individua domande per conoscere persone, oggetti, attraverso interviste, discussioni all'interno di un gruppo; distingue informazioni qualitative e quantitative, semplici analogie e differenze. Standard L*, Livello 2.10, *Individua e stima intuitivamente indicatori demografici significativi e loro valori (numero di abitanti della città, età media, numero di figli per famiglia,..). Standard L*, Livello 3.12, *Organizza una ricerca su piccolo campione, ne pianifica le fasi ed elabora e rappresenta i risultati. Standard L*, Livello 4.17. *Distingue campione ed universo statistico; valuta la rappresentatività di un campione, l'attendibilità di un sondaggio; Livello 4.19. Fa emergere dati a partire dalla descrizione di un fenomeno o di una situazione.*

Perché il secondo valore in generale è maggiore del primo?

Non sono casuali i campioni?

Perché sono distorti?

Si possono poi fare altri esempi : sarebbe corretto per sapere la media di figli delle famiglie di un paese mettersi davanti ad una scuola elementare e chiedere ad ogni adulto quanti figli ha e poi fare la media? Il campione è distorto? Perché?

Lo studente: si immedesima in colui che ha svolto le indagini per capire da quali presupposti è partito e come è arrivato alle conclusioni che presenta nell'analizzare il campione e le metodologie seguite per evidenziare eventuali distorsioni? Mette in discussione le tesi che altri ci presentano per decidere senza condizionamenti se accettarle o confutarle?

Il docente deve far emergere la giustificazione del ricorso alla campionatura nel caso di indagini che coinvolgendo una popolazione molto numerosa non sarebbe fattibile in tempi ragionevoli, far capire che è necessario che il campione conservi le caratteristiche dell'intera popolazione in relazione alle caratteristiche che vogliamo indagare perché non risulti appunto distorto; stimolare nell'allievo la capacità di analisi e valutazione dei campioni scelti; stimolare la capacità critica dell'allievo

Possibili approfondimenti

Correlazione statistica. Si potrebbe ampliare il discorso considerando che a volte può essere utile per un'indagine statistica prendere in considerazione due caratteristiche quantitative (per esempio statura e peso di un gruppo di atleti) e vedere rappresentandole in maniera opportuna (ad esempio in un piano cartesiano) come la loro distribuzione a volte non sia casuale, ma presenti un orientamento (es sud-ovest e nord-est) che denota una correlazione tra le due caratteristiche esaminate (per esempio positiva cioè all'aumentare -diminuire della prima caratteristica la seconda aumenta-diminuisce).

Gestione della distorsione di un campione. Si potrebbe mostrare come, nel caso si conosca il tipo di distorsione presente in un campione, si possa agire sui calcoli in modo che l'indagine risulti ugualmente rigorosa.

Per esempio si potrebbe utilizzare un esercizio simile al seguente.

Si vuole stabilire quanto spesso la gente va al cinema, ci mettiamo fuori da una sala cinematografica e chiediamo ad un certo numero di spettatori scelti a caso quante volte al mese va al cinema abitualmente.

Otteniamo i seguenti dati:

volte al mese	numero risposte	frequenza in %
1	3	2.3
2	10	7.7
3	27	20.8
4	40	30.8
6	24	18.5
8	16	12.3
10	10	7.7

È corretto concludere che gli abitanti di quel paese vanno al cinema quasi 5 volte al mese?

È distorto il campione?

In primo luogo non si tiene conto di al cinema non va, secondariamente chi va più spesso al cinema avrà maggior possibilità di essere intervistato di chi va meno. In generale chi va due volte in media al cinema avrà probabilità doppia di essere intervistato rispetto a chi non va, analogamente per chi va tre, quattro, cinque volte e così via. Quindi è come se le frequenze fossero state moltiplicate per 2, 3, 4, 5 e così via. Possiamo dunque ritoccare la tabella precedente.

volte al mese	numero risposte	frequenza in %
1	3	8.8
2	5	14.7
3	9	26.5
4	10	29.5
6	4	11.8
8	2	5.9
10	1	2.9

Possiamo quindi concludere che la popolazione che va al cinema ci va in media tra le tre e le quattro volte al mese?

Abbiamo corretto in parte la distorsione, perché comunque nulla possiamo dire di coloro che non vanno al cinema e che farebbero sicuramente abbassare la media, ma non possiamo prevedere di quanto

A seconda dell'interesse e del contesto si potrebbe introdurre la definizione di gioco equo e esaminare alcuni casi. Per esempio il gioco del lotto e vedere qual è la probabilità di vincita nei vari casi, qual è la speranza di vincita del banco e del giocatore.

5.6 Note sulle unità didattiche

Per elaborare le unità didattiche sopra esposte sono partita da due convinzioni personali che hanno accompagnato fin dall'inizio la mia formazione "matematica" e che mi hanno aiutato nella mia professione di docente:

la matematica è una creazione della mente umana e quindi deve essere fatta o rifatta nella mente di ogni persona che apprende l'allievo deve essere il protagonista della propria formazione culturale, della sua educazione matematica. Il soggetto che apprende non deve essere un ricettore passivo di nozioni che altri hanno confezionato per lui, ma un "inventore", uno "scopritore" di concetti nuovi, nuovi almeno per lui.

Ho poi cercato di individuare argomenti diversi, ma che avessero un particolare valore intrinseco per i concetti matematici presentati o anche particolare valenza per la formazione della persona per la lettura dell'ambiente che ci circonda.

L'unità "**Figure geometriche**" ha come obiettivo primario quello di fornire, attraverso lo studio delle figure geometriche, uno strumento di lettura della realtà considerando, a questo livello, la geometria come un primo capitolo della fisica, come un tentativo di spiegare il mondo fisico.

Un secondo obiettivo è quello di avviare i soggetti alla soddisfazione della scoperta, al gusto della ricerca per affinare lo spirito critico dei soggetti, potenziare le capacità di scelta, di decisione autonoma e di corretta espressione del proprio pensiero.

Sviluppare la capacità di ricavare e costruire modelli è sicuramente un valore formativo intrinseco della matematica, e in particolare di questa parte; sarà compito del docente impostare il lavoro in aula monitorando costantemente i due aspetti della materia:

quello funzionale che permetterà all'allievo di impadronirsi di strumenti utili per compiere misurazioni e calcoli geometrici piani

quello formativo intrinseco che potenzierà le capacità di astrazione, analisi, sintesi e sistematizzazione proprie delle attività mentali necessarie per ricavare modelli.

Partendo dal presupposto che la matematica ha un valore intrinseco, un valore antropologico e un valore funzionale, ho voluto scegliere con la seconda unità "**I Numeri**" un argomento che fosse indispensabile per l'ultimo aspetto, facesse parte integrante del secondo e allo stesso tempo fosse un nucleo fondante. Il "numero" mi è parso da subito un concetto centrato perché non vi è aspetto funzionale della matematica che possa prescindere da esso, l'operazione di contare fa sicuramente parte della natura umana, il numero è sicuramente un riconosciuto nucleo fondante della matematica.

Riflettendo poi sugli standard ho osservato che il contenuto di questa unità pur non essendo indispensabile per ottenere i risultati in essi riportati (posso utilizzare numeri decimali correttamente e in maniera spigliata anche senza avere un supporto teorico rigoroso sul concetto di numero razionale...) risponde all'esigenza di dar voce al fatto che " la matematica è per tutti e non per pochi " *
 "Ritengo, infatti, indispensabile anche introdurre qualche trattazione di più alto livello che possa trasmettere agli allievi siano essi adulti o giovani della formazione professionale una "formazione matematica" nel senso pieno del termine. Sono consapevole che i contenuti riportati non siano semplici e che

probabilmente non sia sempre possibile introdurli. Non ho avuto occasione di sperimentarne l'insegnamento se non a livello di scuola secondaria superiore, ma penso possa essere un argomento interessante anche per degli adulti, compatibilmente con conoscenze pregresse e tempi a disposizione.

L'unità didattica sui numeri vuole essere il modo per dare ragione di una definizione rigorosa completa dei numeri reali. Deve essere affrontata solo se la classe è in grado di capire concetti di una certa levatura e ha un buon grado di astrazione, ritengo sia consigliabile non affrontare un simile argomento piuttosto che scendere a compromessi. La trattazione viene dopo che gli allievi hanno già acquisito familiarità con tecniche di calcolo sia con i numeri interi che razionali. Vuole dare risposte a curiosità legittime riguardo un oggetto che non si vede, ma senza il quale non si può fare praticamente niente!!!

Sarà compito del docente nel caso decida di affrontare i contenuti esposti far emergere i contenuti formativi intrinseci e portare gli allievi a trarre profitto intellettuale non solo dall'ottenimento del risultato funzionale, ma anche dall'applicazione del metodo e dalla comprensione dei concetti, dalla loro consapevole interiorizzazione e dal rigore che li governa. I numeri reali vengono introdotti "gradatamente" passando attraverso la definizione dei numeri naturali, interi e razionali sia per dare completezza al tema trattato sia per preparare alla complessità e alla necessità della definizione dei reali che deve essere vista come eventuale completamento e non come parte indispensabile dell'unità

Nel linguaggio comune si trovano spesso affermazioni del tipo "logicamente", "a rigor di logica", "da ciò si può logicamente dedurre che " ed altre simili. Ma che cos'è la Logica? Quando siamo autorizzati ad utilizzare espressioni simili a quelle indicate sopra? L'unità didattica "Operatori logici" vuole portare gli allievi ad una comprensione corretta e rigorosa di affermazioni che traggono legittimizzazione dalla logica sia un passo fondamentale per la corretta interpretazione di testi parlati o scritti che incontriamo nella vita quotidiana. Questo permette all'individuo di muoversi con più consapevolezza, di resistere maggiormente ai condizionamenti e di scegliere con più accuratezza e convinzione.

Oltre all'aspetto funzionale della parte in oggetto che permette ad ognuno di intendersi con gli altri, di comprendere testi scritti con riferimenti a termini logici e di valutare ragionamenti, di fondamentale importanza è l'aspetto formativo intrinseco che consente di organizzare il proprio pensiero potenziando le proprie capacità logiche.

In molte attività quotidiane svolgiamo senza rendercene conto attività riconducibili a concetti matematici, quelli di ordinare e catalogare sono due esempi particolarmente ricorrenti e da questa osservazione sono partita per elaborare l'unità didattica "Ordinare e catalogare" Acquisire, in queste due operazioni, maggior consapevolezza può essere utile per svolgere con padronanza tali operazioni in situazioni più complesse o particolari. Per ordinare merci in uno scaffale di un magazzino anziché nella credenza della nostra cucina, per catalogare i messaggi ricevuti in uno sportello di accettazione piuttosto che le bollette di casa nostra occorrerà un'attenzione in più, occorrerà ricercare un risultato che possa essere condiviso con altri che non hanno partecipato al nostro lavoro, ma che devono poterne usufruire nel modo più efficiente e veloce possibile.

Catalogare, selezionare e ordinare oltre ad essere operazioni funzionali al nostro "vivere" quotidiano fanno parte del bagaglio formativo intrinseco che ci può dare

la matematica, indipendentemente dal suo utilizzo nel concreto come abilità mentali di ragionamento.

La finalità dell'unità è far prendere coscienza delle operazioni svolte per catalogare e ordinare, mettere gli allievi in condizione di scegliere il criterio di ordine o di catalogazione in base al contesto per arrivare a svolgere il compito in modo ottimale.

La statistica e la probabilità hanno assunto una notevole importanza nella matematica sia pura che applicata, ma particolarmente nelle scienze fisiche, biologiche e sociali.: questa la motivazione per la scelta dei contenuti dell'ultima unità di didattica "Statistica e probabilità". Molte di queste applicazioni restano fuori della portata di un curriculum della scuola dell'obbligo per la difficoltà tecnica degli strumenti matematici utilizzati, ma l'introduzione di alcune parti concettualmente più semplici costituisce un'opportunità per introdurre altri importanti concetti matematici (grafi, frazioni, diagrammi, funzioni, proporzioni, equazioni, potenze...), stimola l'attività di analisi del reale e lo spirito critico fornisce strumenti per lavori interdisciplinari e presenta un "tipo" di matematica diversa da quella tradizionalmente conosciuta dell'algebra e della geometria. La probabilità ha inoltre in sé il grosso vantaggio che basta un bagaglio anche piccolo di conoscenze matematiche per risolvere problemi interessanti e vari (bastano per molti le sole frazioni) e che si può realizzare con facilità un insegnamento per problemi che risulti stimolante e creativo

Un particolare attenzione deve essere rivolta anche alla facilità di fraintendimento che porta con sé la probabilità sulla spinta di intuizioni a volte fallaci e che quindi necessitano di essere affinate. Non bisogna cadere nell'errore "ideologico" secondo il quale il ragionamento probabilistico sarebbe intrinsecamente diverso da quello matematico, occorre chiarire che le affermazioni probabilistiche, se correttamente condotte, portano a risultati univoci come quelle relative alle altre branche della matematica. La proposta è quella di integrare in un'unica trattazione probabilità e statistica senza però oscurare le differenze sostanziali tra le due discipline. Le nozioni di statistica e probabilità vengono viste all'inizio come due aspetti del medesimo approccio: la previsione della probabilità a priori e la statistica dei risultati a posteriori.

Un valore formativo intrinseco di questa parte che, ritengo prioritario, e che dovrebbe essere tenuto costantemente sotto controllo è la capacità di formulare ipotesi, congetture, di porsi domande e cercare risposte, di mettere in dubbio affermazioni aumentando le capacità critiche degli allievi. Il docente può formare in questo senso gli allievi utilizzando nelle lezioni la stessa tecnica (domande, ipotesi, verifiche, ...) e mettendo in rilievo le operazioni mentali che egli stesso compie accompagnando gli allievi attraverso un percorso consapevole di analisi critica.

Tutte le unità si prestano per partire da un problema concreto che possa servire da stimolo per esercizi o problemi più complessi, comunque adatti al contesto o scaturiti direttamente dalla classe.

Si propongono alcuni esempi:

Figure geometriche:

Dipingere una stanza dovendo acquistare una pittura sul cui contenitore è dichiarata la dose necessaria per metro quadro

Seminare un prato utilizzando una semente sulla cui confezione è dichiarata la dose necessaria per metro quadro

Dover acquistare carta sufficiente per ricoprire un certo numero di libri

I numeri:

Imposterei proprio il lavoro come un confronto su conoscenze pregresse degli insiemi dei numeri in oggetto per far nascere l'esigenza di una definizione rigorosa, se necessario anche mostrando come presunte definizioni eventualmente riferite dagli allievi in realtà siano errate dal punto di vista matematico o non rigorose dal punto di vista lessicale.

Operatori logici:

Presentare una serie di tagli di giornale in cui si utilizzano termini afferenti alla logica e stimolare una discussione riguardo i significati, i valori di verità, la correttezza dei ragionamenti mettendoli in dubbio, facendo ipotesi aggiuntive che permettano di confutarne o confermarne il valore. Si dovrebbe arrivare alla necessità di "saperne di più" riguardo la logica, la logica matematica naturalmente.

Ordinare e catalogare: presentare agli allievi una serie di scatole diverse per colore, per materiale, per dimensione, per contenuto (che potrebbe essere ad esempio essere indicato sulla scatola stessa) e chiedere agli allievi divisi in gruppo di catalogare e ordinare le scatole motivando le proprie scelte. Ci saranno comportamenti diversi: chi ordinerà in base all'altezza dicendo che in questo modo c'è più ordine, chi penserà alla visibilità mettendo davanti le più basse e dietro le più alte, chi penserà alla forma per risparmiare spazio, chi dividerà in base al colore per motivi estetici, chi selezionerà merci di tipologia simile.

Tanti diversi modi di comportarci in risposta ad uno stesso compito! Ma qual è il migliore? Per dirlo devo prima di tutto sapere in quanti modi posso farlo?

Statistica e probabilità: tutti i problemi che portano a sfide, giochi, previsioni statistiche realizzati anche attraverso esperimenti. L'abilità del docente starà nel pilotare correttamente gli esperimenti stessi.

5.7 Analisi del modello prevalente *Progressioni di concetti*

Tutte le unità didattiche presentate afferiscono ad un modello prevalente che è stato definito ***Progressioni di concetti***.

Il modello è rappresentato nello schema riportato che vuole rappresentare graficamente le parti principali delle unità didattiche presentate.

Studio della disciplina: in questa parte si vogliono mettere in evidenza gli aspetti intrinseci e funzionali che hanno portato alla scelta dei contenuti dell'unità stessa sia in riferimento agli standard che agli aspetti formativi propri della matematica.

Studio per livelli concettuali: in questa parte, invece vengono presentati i concetti sviluppati per livelli concettuali allo scopo di costruire una conoscenza sempre più complessa che il docente si farà carico di calibrare in base alle esigenze degli allievi, in base alle loro conoscenze pregresse e in base al contesto. Non è detto che si decida di affrontare tutti i livelli proposti si potrebbe decidere in alcuni casi di fermarsi ad un livello inferiore e in altri di iniziare, verificati i precedenti come prerequisiti, da un certo livello; i contenuti sono però visti come strettamente sequenziali.

Studio degli apprendimenti: in questa parte vengono prese in esame le azioni del docente e le operazioni mentali dell'allievo in relazione alle ipotesi di ricadute formative che si sono via via configurate durante lo svolgimento dell'unità stessa e alcuni possibili approfondimenti che possono integrare i contenuti già esposti.

