6. PROGRESSIONI DI ESERCIZI-PROBLEMI

Le unità didattiche:

6.1 L'aritmetica dell'orologio

6.2 Il teorema di Pitagora

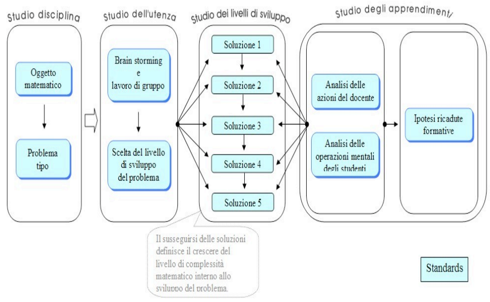
6.3 L'operatore percentuale

6.4 Le funzioni

6.5 Rapporti e proporzioni

6.1 L’aritmetica dell'orologio

Verificata l'acquisizione di un discreto livello di operatività sulle quattro operazioni nell’insieme degli interi, con la UD ci si propone di ampliare negli allievi la conoscenza del concetto di operazione in generale e delle eventuali proprietà che regolano il comportamento operativo a seconda degli oggetti con cui si opera, per creare la consapevolezza che in matematica ogni contesto detta le proprie regole che vanno rigorosamente applicate per costruire ragionamenti corretti.



In una città due linee metropolitane iniziano il loro servizio dallo stesso capolinea alla stessa ora. Per la linea A è prevista una corsa ogni 10 minuti, per la linea B una corsa ogni 12 minuti. Gli autisti delle due linee riescono a completare l'ultimo percorso nelle otto ore previste del proprio turno di servizio senza tempi "straordinari"?

Le soluzioni

Si provano ad elencare di seguito alcune soluzioni del problema proposto senza entrare nei dettagli, evidenziando i concetti matematici, anche in termini di collegamenti utilizzati, le operazioni mentali eseguite dagli allievi e le ricadute formative che ne potrebbero derivare se gestite opportunamente dal docente. Le alternative di soluzioni, pensate nella simulazione come il lavoro di altrettanti gruppi, volutamente vengono esposte via via in un crescendo di rigore e generalizzazione, comunque punto d’arrivo per ogni gruppo, eventualmente con il supporto dell’insegnante.

Molto spesso un problema può essere risolto seguendo strategie molto lontane tra loro che non condividono neppure il concetto chiave della soluzione. Si vengono a creare situazioni d'apprendimento con differenti ricadute: è compito del docente intervenire nel percorso per favorire la convergenza a comuni obiettivi d'apprendimento.

1^ soluzione

La genericità della quantità su cui è costruito il problema, crea difficoltà nell’avvio.

Si segue allora la strategia della ricerca della soluzione per “tentativi”. Il confronto dei risultati ottenuti partendo da ore diverse, i calcoli svolti utilizzando multipli e sottomultipli del sistema orario, rivelano in modo evidente l'insolito comportamento dell'operazione di somma. La costruzione di una tabella oraria relativa alle otto ore del turno di lavoro facilita una conclusione: nei casi esaminati i due autisti compiono un numero intero di corse senza far ricorso a tempi supplementari. Il risultato comunque non ha validità generale per la modalità di soluzione seguita.

Lo studente: Distingue i dati noti e i dati incogniti del problema? Esamina i dati e individua gli obiettivi del problema? Affronta la soluzione del problema procedendo per tentativi? Riconosce le criticità del problema? Amplia il campo d'indagine con alternative di soluzione?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard C, Livello 1.2 *Conosce sottomultipli dell'ora e relativi simboli,* Livello 1.3 *Legge, scrive tempi con notazioni di uso corrente,* Livello, 1.10 *Moltiplica e divide i numeri per 60, 2.2 Esegue semplici equivalenze da ore a minuti a secondi,* Livello 3.1 *Legge, scrive alcuni tempi con notazione centesimale,* Livello 3.8 *Calcola addizioni e sottrazioni di tempi, in forma scritta, anche con prestiti e riporti.*

Il docente, per facilitare lo studente, prendendo spunto dalla tabella costruita per la soluzione può stimolare gli allievi a confrontare il comportamento di questo insieme rispetto all'operazione di somma con la stessa operazione introdotta negli interi per far nascere l'idea di generalizzazione, o meglio, per farne sentire la necessità comprendendo la differenza tra caso particolare e generale.

Quindi per sviluppo delle operazioni mentali sopra descritte invita lo studente a leggere eventi della vita quotidiana con formule matematiche, ad utilizzare il linguaggio, le regole e i vincoli di un nuovo contesto, spiega o crea le condizioni perché lo studente apprenda come le formule matematiche possono essere d'aiuto nelle piccole scelte della vita quotidiana, lo invita a ricercare soluzioni generali attraverso intuizioni dedotte da casi particolari, come un'affermazione debba essere sostenuta da premesse esatte, essere condotta con rigore e coerenza e la conclusione non debba contraddire alcun aspetto del percorso, lo sollecita a concludere un discorso coerente con un'affermazione di carattere generale, a studiare un problema anche da punti di vista diversi rispetto agli obiettivi per allargare la conoscenza dell'oggetto di studio, a rispettare le regole del contesto di appartenenza.

2^ soluzione

La soluzione del problema viene ottenuta con considerazioni di carattere generale utilizzando il concetto di minimo comune multiplo: le due linee riprendono contemporaneamente dal capolinea ogni ora, quindi gli autisti completano anche l'ultima corsa nell'arco delle otto ore lavorative. In questo caso gli studenti, notato che all'interno dell'unità oraria si è venuta a configurare per entrambe le linee una situazione analoga a quella esistente nell'aritmetica dell'orologio con codice di riferimento cambiato, si spingono oltre nella loro ricerca, soffermandosi su nuovi aspetti dell'ambiente matematico oggetto di studio, che si concretizzano nella formulazione di congetture del tipo: si possono costruire a piacere aritmetiche finite:

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard C. Livello 1.2 *Conosce sottomultipli dell'ora e relativi simboli, Livello 1.3 Legge, scrive tempi con notazioni di uso corrente, Livello 1.10 Moltiplica e divide i numeri per 60, Livello 2.2 Esegue semplici equivalenze da ore a minuti a secondi .* **Standard I,** Livello 2.9 *Raccoglie informazioni da altre persone, le confronta con la propria esperienza* **Standard L**, Livello 4.18 *Ragiona evidenziando relazioni.*

- l'infinità degli elementi si compatta in un numero finito di elementi in questi insiemi i numeri non sono più ordinati come nell'insieme degli interi
- non si può affermare che lo zero è il numero più piccolo in questo insieme.

Lo studente: Discute e si confronta con gli altri per controllare l'esattezza dei concetti matematici? Seleziona dati e variabili del problema e individua le problematiche esistenti?Individua collegamenti con altri concetti matematici?Risolve il problema utilizzando lo strumento adeguato (m.c.m.), ipotizza sviluppi successivi?

La qualità delle considerazioni degli allievi induce il docente ad alzare il livello di approfondimento del tema, suggerendo la ricerca di collegamenti tra i concetti matematici utilizzati nella risoluzione del problema; ad esempio, si possono stabilire connessioni tra il m.c.m. e l'aritmetica finita che consentono la dimostrazione dei criteri di divisibilità. Il docente per facilitare le operazioni mentali dello studente sopra descritte lo invita a leggere i problemi senza schemi precostituiti, ad applicare il concetto di minimo comune multiplo in un contesto inusuale rispetto ad altre situazioni già incontrate, spiega le giustificazioni delle regole del calcolo del m.c.m, lo induce a utilizzare esperienze già vissute per affrontare nuove situazioni, a intravedere modalità per collaborare nel gruppo della propria realtà lavorativa, per accrescere la visione d'insieme del problema rispetto alle strade percorribili, a discutere nel team di lavoro i dati del problema e la reale applicabilità della strategia ipotizzata, ad utilizzare esperienze già vissute per affrontare nuove situazioni, a leggere i problemi senza schemi precostituiti.

3^ soluzione

La riduzione delle otto ore in minuti e la divisione per il tempo impiegato per ogni percorso, permette di concludere che gli autisti non devono ricorrere a tempi supplementari di lavoro. La modalità di soluzione seguita porta ad una risposta di carattere generale. Il passaggio dalle ore ai minuti consente di operare un primo livello di generalizzazione del problema, indicando una semplificazione nella ricerca della soluzione nei casi in cui i dati assegnati richiedano calcoli più laboriosi. L'analisi di una tabella oraria costruita su otto ore induce poi gli allievi ad ipotizzare di poter costruire un'aritmetica con codice identificativo non più 12 ma 8 e in cui l'operazione di somma segue lo stesso comportamento.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard C, Livello 1.2 *Conosce sottomultipli dell'ora e relativi simboli,* Livello 1.3 *Legge, scrive tempi con notazioni di uso corrente,* Livello 1.10 *Moltiplica e divide i numeri per 60, Livello 2.2 Esegue semplici equivalenze da ore a minuti a secondi,* Livello 3.1 *Legge, scrive alcuni tempi con notazione centesimale,* Livello 3.8 *Calcola addizioni e sottrazioni di tempi, in forma scritta, anche con prestiti e riporti,* Livello 4.12 *Converte tempi in sottomultipli per eseguire divisioni.* **Standard L**, Livello 1.2 *Distingue informazioni qualitative e quantitative, semplici analogie e differenze,* Livello 4.18 *Ragiona evidenziando relazioni.*

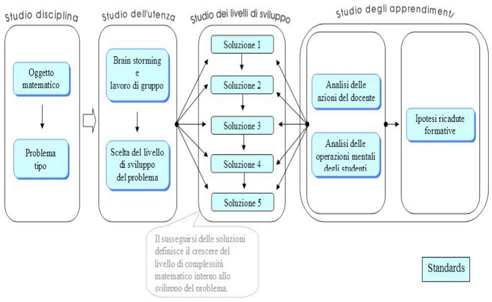
Partendo da questi risultati il docente stimola gli studenti ad estendere il campo d'indagine sull'aritmetica del finito, suggerendo di immaginare i numeri disposti su una circonferenza e non su una retta: su questa circonferenza si può pensare di disporre un qualunque numero finito di elementi, calcolare somme nell'insieme e verificare le proprietà dell'operazione. In questo modo si può soddisfare l'esigenza di operatività infinita facendo ricorso ad un insieme finito. L'universo matematico, da lineare, è diventato ciclico e non ha perso nulla delle sue potenzialità operative, acquistando invece in comprensibilità e in possibilità di visualizzare le operazioni. Per la prima volta l'insegnante può mostrare in modo concluso una tabella di operazione di un insieme infinito, senza difficili operazioni d'astrazione.

Lo studente: Indaga su possibili estensioni di concetti noti? Opera con multipli e sottomultipli del sistema orario? Esprime congetture su situazioni già studiate per ampliare le proprie conoscenze? Conosce e applica le proprietà di uguaglianza ed equiscomponibilità? Evidenzia analogie e differenze? Individua una strategia di soluzione applicabile a problemi con maggior complessità?

Il docente perché lo studente possa attivare tali operazioni mentali presenta l'aritmetica degli insiemi infiniti utilizzando insiemi finiti, lo invita a leggere la realtà che lo circonda in chiave matematica, a rispettare le regole del contesto di appartenenza, a raccogliere informazioni da altre persone e confrontarle con la propria esperienza, ad individuare e giustificare analogie e differenze, ad ipotizzare sviluppi successi.
In prospettiva il lavoro può dare luogo ad alcuni possibili approfondimenti e collegamenti, ad esempio: ampliare il discorso utilizzando come modulo un numero non primo per verificare che in questa aritmetica in generale non vale la legge dell'annullamento del prodotto, sviluppare argomenti successivi come ad esempio le relazioni di equivalenza e d'ordine utilizzando le congruenze, studiare le diverse rappresentazioni dell'orario nell'arco della giornata (A.M, P.M), approfondire il tema dei fusi orari.

6.2 Il teorema di Pitagora

Lo scopo prioritario non è concentrare l'interesse sul significato geometrico quanto sull'operazione mentale di semplificazione che porta a schematizzare una situazione reale in un triangolo rettangolo e sull'uguaglianza triangolare numerica, (a^2+b^2=c^2), che può diventare un potente strumento di gestione della realtà.



Una scala a pioli lunga m. 5 è appoggiata ad una parete; se la scala arriva a 3 m. di altezza dal suolo, a quale distanza dalla parete dovrà essere il suo piede d'appoggio? che viene proposto come problema stimolo.

1^ soluzione
Un metodo per risolvere un problema come questo può essere quello di effettuare dei tentativi: si suppone di passare dall'unità di misura in metri ad un'altra di comodo che renda possibile la reale costruzione di triangoli, di attribuire al terzo lato un'arbitraria lunghezza e poi verificare se il valore scelto è compatibile con i dati assegnati per la realizzazione del triangolo anche utilizzando le proprietà sulle disuguaglianze triangolari. Si determina la soluzione cercata eseguendone una misura con un righello o altro; il metodo comunque, anche nel caso, alquanto improbabile, di conclusione positiva, consentirà l'individuazione di una grossolana approssimazione dell'effettivo risultato.

Lo studente: Distingue tra dati noti e dati incogniti? Esamina i dati e individua gli obiettivi del problema? Affronta la soluzione del problema procedendo per tentativi? Individua relazioni tra i dati del problema? Riconosce il carattere di una soluzione (generale o particolare)? Trasforma in modello matematico un problema reale?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B, Livello 1.7 *Legge, individua misure su righe, righelli, metri,* 2.1 *Conosce le unità di misura di lunghezza metrico-decimali; Sceglie l'unità di misura opportuna,* 2.2 *Misura lunghezze,* 2.3 *Usa una notazione unica per indicare multipli e sottomultipli di unità di misura.* **Standard F**, Livello 2.2 *Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati) e loro proprietà a partire da oggetti concreti; distingue angoli più comuni,* Livello 4.15 *Individua quesiti a partire da dati; individua problemi e punti critici.* **Standard L**, Livello 3.3 *Distingue tra dati essenziali, accessori, impliciti ed espliciti.*

Per quanto la proposta di soluzione possa sembrare insoddisfacente dal punto di vista contenutistico, compito del docente è valorizzare il risultato raggiunto facendone il punto di partenza per accrescere le competenze di carattere disciplinare e della persona.
Nell'effettuare questi tentativi, si procede del tutto alla cieca, si può, pur dopo molte prove, non trovare il valore cercato. Il docente deve favorire il processo di ristrutturazione del campo percettivo per favorire la soluzione produttiva. Si può allora far intravedere l'opportunità di effettuare dei tentativi ragionati, in modo tale che ad ogni successiva prova ci si avvicini sempre più alla soluzione cercata. Gli allievi andranno stimolati a ragionare sul motivo per cui il lato da individuare non potrà essere maggiore dell'ipotenusa e minore della differenza dei due lati assegnati. A questo punto, se si volesse effettuare un altro tentativo, non converrebbe procedere a caso scegliendo un qualunque altro numero. Pur non conoscendo ancora la soluzione, il tentativo successivo sarà effettuato tenendo conto delle limitazioni individuate dalle riflessioni precedenti e

quindi nell'ambito di un preciso intervallo. Procedendo con questo metodo, ogni successivo tentativo sarà effettuato scegliendo un valore nell'ambito di un intervallo sempre più piccolo in modo da avvicinarsi sempre di più alla soluzione. Il metodo risulta comunque molto laborioso perché comporta la necessità di fare molti calcoli. Si potrebbe inoltre suggerire come alternativa, per una veloce individuazione della misura del terzo lato, la costruzione di un triangolo che preveda, dati due segmenti, di determinare il terzo con misurazione diretta, ad esempio con un righello opportunamente collocato (perpendicolare al lato minore). In questo processo il docente fa presente allo studente lo scarso successo del metodo per tentativi, lo invita a ricercare soluzioni generali attraverso l'osservazione di casi particolari, ad individuare elementi e relazioni che possano delimitare il dominio di scelta della soluzione, ad operare scelte ragionate di soluzione, riesaminare il problema alla scoperta di nuovi elementi.

2^ soluzione

Si fa ricorso ad un foglio di carta quadrettata e ad un sistema di coordinate cartesiane in cui si costruiscono i lati, senza indicare l'unità di lunghezza, dato che non importa di quali unità si tratti. Il cateto viene posto sull'asse delle ordinate con il primo vertice nell'origine e a partire dal secondo, si traccia con l'aiuto di un righello l'ipotenusa, determinando il suo secondo vertice sull'asse delle ascisse. L'ascissa del punto individuato fornisce la soluzione del problema anch'essa di natura approssimata, visto il metodo seguito.

Lo studente: Distingue tra dati e dati incogniti? Esamina i dati e individua gli obiettivi del problema? Riconosce le criticità del problema? Trasforma in modello un problema reale? Individua relazioni tra i dati del problema? Riconosce il carattere di una soluzione (generale o particolare)?

Visto che gli allievi pur riconoscendo il modello matematico sembrano non riconoscere le potenzialità applicative del teorema, per avvicinarli all'aspetto operativo si può sollecitare l'approfondimento sul tema delle terne pitagoriche guidandoli nella scoperta di qualche proprietà ad esse relative. Ad esempio si può analizzare qualche tabella di quadrati in ordine crescente e notare che molte terne contengono due numeri consecutivi e indagare sul fatto che se il numero dispari 2n+1 è un quadrato perfetto, n e n+1 formeranno con la radice quadrata del numero una terna. Anche in questo caso il docente dovrà invitare lo studente a leggere eventi della vita quotidiana in chiave matematica, a studiare un problema da diversi punti di vista per ampliare la conoscenza dell'oggetto di studio, a riesaminare il problema alla scoperta di nuovi elementi e relazioni.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B, Livello 3.5 *Misura e approssima misure di lunghezza con strumenti, ed allo* **Standard E,** Livello 2.9 *Calcola di quanto una grandezza è maggiore o minore di un'altra,* **Standard F,** Livello 2.2 *Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati) e loro proprietà a partire da oggetti concreti; distingue angoli più comuni, Livello 4.15 Individua quesiti a partire da dati; individua problemi e punti critici..* **Standard I,** Livello 2.9 *Raccoglie informazioni con un criterio,* **Standard L**, Livello 3.3 *Distingue tra dati essenziali, accessori, impliciti ed espliciti.*

3^ soluzione

La soluzione, di carattere generale, del problema viene affrontata per via algebrica, indicando con un'incognita l'elemento cercato.

Lo studente: Distingue tra dati noti e dati incogniti? Opera scelte supportate da certezze teoriche? Trasforma in modello matematico un problema reale? Traduce in formula un problema? Riconosce il carattere di una soluzione (generale o particolare)?

Notato che il calcolo letterale fornisce uno strumento molto potente per una soluzione rapida del problema si può provocare la curiosità intellettuale degli studenti sul significato geometrico del teorema richiamando il percorso storico dell'elaborazione di efficaci metodi di risoluzione dei problemi.[30] Per lo sviluppo di questo processo il docente deve fare collaborare lo studente nel gruppo richiamando la sua realtà lavorativa, per accrescere la visione d'insieme del problema rispetto alle strade percorribili, ricercare collegamenti tra ambiti diversi (algebra e geometria), discutere nel team i dati del problema e la reale applicabilità della strategia ipotizzata, discutere la natura delle problematiche sottese ad un problema, utilizzare esperienze già vissute per affrontare nuove situazioni, agire situazioni in cui sia possibile ampliare il campo di analisi di un problema.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B Livello *4.5 Conosce quadrati perfetti e loro radici.* **Standard F,** Livello 2.2 *Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati) e loro proprietà a partire da oggetti concreti; distingue angoli più comuni,* Livello 4.15 *Individua quesiti a partire da dati; individua problemi e punti critici.* **Standard I**, Livello 2.9 *Raccoglie informazioni con un criterio, Livello 3.3 Distingue tra dati essenziali, accessori, impliciti ed espliciti.*

4^ soluzione

Dopo aver calcolato il terzo lato con l'utilizzo della formula inversa del teorema, si procede in modo consapevole ad una riduzione in scala dei dati del problema, utilizzando un'opportuna unità di misura, per valutare l'esattezza del risultato, realizzando concretamente il triangolo, ad esempio con stecchetti di legno od altro materiale di facile reperibilità e gestibilità.

Lo studente, grazie al gruppo: Distingue tra dati noti e dati incogniti? Opera scelte supportate da certezze teoriche e da convinzione? Trasforma in modello matematico un problema reale? Traduce in formula un problema? Riconosce il carattere di una soluzione (generale o particolare)? Collega caratteristiche di fenomeni osservati? Controlla la correttezza dei risultati ottenuti?.

Visto il buon livello di comprensione del concetto raggiunto si può spostare l'attenzione degli allievi su un aspetto, quello storico, generalmente scarsamente studiato, riguardante i metodi di soluzione dei problemi utilizzati nei vari periodi della storia della matematica.[31]

Si può inoltre verificare il livello di consapevolezza con cui è stato

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard B, Livello 3.10 *Calcola misure reali da un disegno in scala,* Livello 4.5 *Conosce quadrati perfetti e loro radici, 4.6 comprende, usa, calcola rapporti in scala, 4.7 risolve problemi di riduzione in scala.* **Standard F,** Livello 2.2 *Riconosce, nomina enti geometrici (rette, angoli, lati) e loro proprietà a partire da oggetti concreti; distingue angoli più comuni.* Livello 3.11 *Usa similitudini per disegno di modelli.* **Standard I**, Livello 2.4 *Applica metodi di controllo del risultato, livello 2.9 Raccoglie informazioni con un*

[30] Nella matematica greca, ad esempio, si fece ricorso a ogni problema alla geometria, cioè alla effettiva possibilità di tr a di liberarsi dalla approssimazione dei metodi per tentativ di procedimenti geometrici mentre rappresentava per la mat uno sviluppo rigoroso , era nel frattempo un grosso vincolo. Per que elevato alla quarta o alla quinta potenza, mentre un mat mile operazione , perché per il matematico greco significava x^2 significava costruire il quadrato di lato x, mentre x^3 signifi

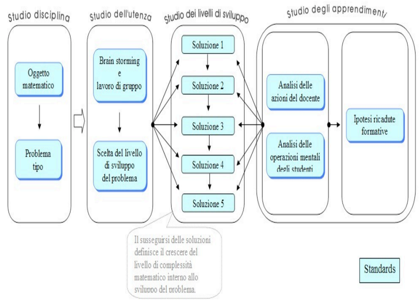
[31] Il procedimento ricalca il metodo di falsa posizione, metod pervenute era in uso presso gli antichi Egizi.

utilizzato il concetto di similitudine nell'applicare la riduzione in scala proponendo quesiti d'approfondimento ad esempio sul rapporto di similitudine. Sarà compito del docente aiutare lo studente a contestualizzare storicamente il concetto matematico per capirne la necessità di sviluppo, evidenziare il modo per riconoscere l'evoluzione storica della soluzione di problemi "tipo". Invita lo studente a raccogliere informazioni da altre fonti che accrescano le conoscenze, discutere con i propri colleghi la natura delle problematiche sottese ad un problema, richiamare esperienze già vissute. ipotizzare approfondimenti degli argomenti di studio.

In prospettiva il lavoro può dare luogo ad alcuni possibili approfondimenti e collegamenti, infatti in ambito matematico il teorema presenta degli immediati collegamenti con la teoria dell'equivalenza delle figure piane, mentre le soluzioni proposte richiamano i concetti di similitudine nella riduzione in scala e di successione nell'individuazione di proprietà delle terne pitagoriche. Per quanto riguarda i collegamenti in altre discipline scientifiche l'uso del teorema è frequentissimo in tutte le parti della fisica in cui occorrono utilizzare schemi di triangoli rettangoli (meccanica, statica, dinamica…).

6.3 L’operatore percentuale

Si propone qui un approccio sociale all’oggetto che permetta di riesaminare un problema da angolature del tutto diverse; scomporlo per ampliare il campo di osservazione, apprendere che un problema può essere risolto in più modi, valutare assieme tra più modi di risoluzione quello più “economico” in termini di risorse e difficoltà, valorizzare il prodotto di altri con correttezza, accrescere la propria conoscenza per disporre di più strumenti di lettura di una realtà da tenere sotto controllo e non da subire.



In un certo anno un prodotto finanziario guadagna il 60%, l’anno successivo perde il 50%, al termine dei due anni il prodotto ha subito un aumento o una diminuzione?

Le soluzioni

Si provano ad elencare di seguito alcune soluzioni del problema proposto senza entrare nei dettagli, evidenziando i concetti matematici, anche in termini di collegamenti utilizzati, le operazioni mentali eseguite dagli allievi e le ricadute formative che ne potrebbero derivare se gestite opportunamente dal docente. Le alternative di soluzioni, pensate nella simulazione come il lavoro di altrettanti gruppi, volutamente vengono esposte via via in un crescendo di rigore e generalizzazione, comunque punto d’arrivo per ogni gruppo, eventualmente con il supporto dell’insegnante.

1^ Soluzione

Il tipo di problema proposto può portare ad una immediata risposta errata: il prodotto ha guadagnato il 10%.

Lo studente: Analizza in modo frettoloso e superficiale il testo? Applica criteri errati nella lettura delle premesse del problema? Valuta in modo errato le variabili? Confronta nel gruppo l’equivoco dei termini matematici proposti?.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard C, Livello 3.3 *Stima l'ordine di grandezza di un costo e di un importo in modo intuitivo.* **Standard B**, Livello 3.7 *Comprende il significato di percentuale.* **Standard E**, Livello 4.15 *Revisionare dati e procedure per rilevare errori e difetti.*

Il docente potrebbe lavorare su questi errori per far capire l’importanza della comprensione del testo, portando eventualmente esempi di altri problemi per evidenziare che una frettolosa lettura può portare ad errori grossolani .

Si potrebbe poi ripartire con un‘analisi più attenta del testo che potrebbe sfociare nella seconda soluzione che parte dall’osservare una situazione apparentemente “strana”. L’azione del docente sarà quindi mirata a fare riesaminare allo studente dati ed elementi del problema, indurlo ad individuare criteri adeguati alla comprensione di un testo, a porsi domande sugli obiettivi del problema e sui termini in esso presenti, a riconoscere l’importanza di una comunicazione basata su un’esposizione chiara e corretta, a riconoscere con umiltà i propri comportamenti e ragionamenti errati, a discutere e confrontarsi con altri per verificare la correttezza dei propri ragionamenti.

2^ soluzione
La genericità della quantità su cui è costruito il problema, crea difficoltà nell'avvio. Si segue allora la strategia della ricerca della soluzione per "tentativi". Si utilizzano quantità note scelte a piacere e si fanno considerazioni sui risultati che, evidenziano in tutti i casi esaminati, una diminuzione della quantità iniziale. Non si sa se questo comportamento esprima il risultato nella generalità dei casi ma sicuramente si può affermare con completa sicurezza che la 1^ soluzione è errata in quanto esistono casi che smentiscono la conclusione.

Ci si domanda poi se si può individuare un legame tra il valore ottenuto e la quantità iniziale nei casi esaminati; si ottiene una legge di proporzionalità diretta, che comunque continua a non avere validità generale perché costruita solo su casi particolari.

Lo studente: Esamina i dati e individua gli obiettivi del problema? Riconosce le criticità del problema? Imposta un percorso per uscire dalla problematicità data? Comprende e applica il concetto di percentuale? Utilizza la tecnica del contro-esempio? Riconosce, seleziona grandezze? Amplia il campo d'indagine con domande aggiuntive?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 3.2 *Calcola sconti, aumenti tasse con percentuali,* Livello 3.3 *Stima l'ordine di grandezza di un costo e di un importo in modo intuitivo.* **Standard B,** Livello *3.7 Comprende il significato di rapporti, frazioni, percentuale.* **Standard D**, Livello 1.8 *Comprende il significato intuitivo ed operativo di valori come 100%,50%.* **Standard F**, Livello 3.4 *Applica operazioni, rapporti, frazioni, percentuali come operatori per calcolare valori unitari, valori complessivi, aumenti, diminuzioni, sconti,* Livello 4.5 *Riconosce casi di proporzionalità diretta,* Livello 4.15 *Individua quesiti a partire da dati noti; individua problemi e punti critici e allo* **Standard L**, Livello 4.18 *Ragiona evidenziando relazioni.*

Sfruttando questa soluzione il docente può introdurre particolari rappresentazioni grafiche utili allo scopo (es. tabelle).
Per evidenziare il problema di fondo della soluzione, cioè la mancanza di una validità generale indipendente dal caso particolare, si possono presentare casi in cui non sia possibile o percorribile in tempi brevi questa strategia per far nascere l'idea di generalizzazione o meglio per farne sentire la necessità comprendendo la differenza tra caso particolare e generale.

Da ciò il docente invita lo studente a riconoscere il carattere di una soluzione (generale, particolare), a ricercare soluzioni generali attraverso osservazioni di casi particolari, ad inserire le conclusioni formulate in un contesto teorico più generale, confermandone la validità, a ricercare alternative di soluzione, a cogliere la differenza tra crescita e diminuzione di una quantità in modo lineare e non.

3^ soluzione
Il gruppo utilizza un sistema di riferimento cartesiano in cui si fa coincidere l'unità di misura con il prodotto finanziario, elemento incognito. Poi, utilizzando con padronanza il concetto di percentuale e la rappresentazione di punti nel piano cartesiano, conclude dall'osservazione dell'andamento del grafico che il prodotto è diminuito con un'affermazione che ha carattere generale per la generalità della scelta dell'unità di misura in un sistema di riferimento.

Lo studente: Discute e si confronta anche con tecniche di brainstorming per controllare l'esattezza dei concetti matematici? Seleziona e precisa i dati e le variabili del problema e individua le problematiche esistenti? Opera scelte supportate da certezze teoriche e da convinzione? Supera la situazione problematica allargandola ad ambiti di natura diversa? Contestualizza la situazione in un ambito più vasto? Individua collegamenti con altri concetti matematici? Confronta, riordina grandezze? Comprende, analizza, ricava dati di un fenomeno da un grafico per punti?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 3.2 *Calcola sconti, aumenti, con percentuali.* **Standard B**, Livello 3.7 *Comprende il significato di rapporti, frazioni, percentuale.* **Standard C**, Livello 2.15 *Legge costruisce grafici con la variabile temporale.* **Standard D,** Livello 1.6 *Addiziona, sottrae importi in danaro separando € e centesimi,* Livello 1.8 *Comprende il significato intuitivo ed operativo di valori come 100%,50%.* **Standard F**, Livello 3.4 *Applica operazioni, rapporti, frazioni, percentuali come operatori per calcolare valori unitari, valori complessivi, aumenti, diminuzioni, sconti.* Livello 4.15 *Individua quesiti a partire da dati noti; individua problemi e punti critici.* **Standard I**, Livello 4.9 *Interpreta e valuta dati sintetizzati in grafici.* **Standard L**, Livello 1.3 *Raccoglie informazioni con un criterio; rappresenta con grafici.* **Standard M**, Livello 2.4 *Individua posizioni nel piano cartesiano.*

A tal fine il docente invita a discutere in gruppo i dati del problema e la reale applicabilità della strategia ipotizzata, la natura delle problematiche, a ricondurre il problema ad esperienze già vissute, a leggere il problema senza schemi precostituiti, ad interpretare grafici offrendo contesti diversi, a riconoscere campi di applicabilità del concetto di percentuale nella pratica della vita quotidiana.

I due metodi successivi richiedono operazioni mentali molti simili alla terza soluzione e si differenziano tra loro in modo significativo soprattutto per i concetti matematici.

4^ soluzione

Un'altra soluzione possibile si basa sul concetto di funzione visto come operatore di aggiornamento di una quantità attraverso le leggi descritte dal problema: in questo caso si indica con x la quantità iniziale che subisce nei due giorni le seguenti variazioni: X   X + 60%X   (60%X + X) – (60%X + X)50%, arrivando all'identica conclusione della soluzione precedente.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 3.2 *Calcola sconti, aumenti con percentuali.* **Standard B**, Livello 3.7 *Comprende il significato di rapporti, frazioni, percentuale.* **Standard D**, Livello 1.8 *Comprende il significato intuitivo ed operativo di valori come 100%,50%.* **Standard E,** Livello 4.9 *Usa lettere per rappresentare grandezze.* **Standard F** Livello 4.15 *Individua quesiti a partire da dati noti; individua problemi e punti critici.*

5^ soluzione

Un' ultima soluzione può seguire il metodo diretto che si avvale dell'uso di un'incognita per rappresentare la quantità e che segue le regole del calcolo letterale. Questa ultima soluzione che non utilizza il concetto di funzione nel suo modello di automa, richiede passaggi concettuali perfettamente identici alla precedente.

Le tre ultime soluzioni permettono al docente di evidenziare l'utilizzo di "strumenti" matematici (sistema di riferimento e lettura di grafici, funzioni, espressioni). Si può poi proseguire il lavoro con diversi orientamenti:

1. uno potrebbe insistere sul "tema" e per esempio invitare i soggetti a ricercare situazioni o prodotti che hanno a che fare con la percentuale

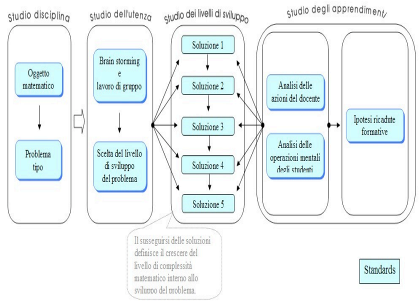
nel quotidiano per poi costruire su quegli esempi altri problemi partendo dalle esperienze personali (es. scatola di alimenti con riportate le percentuali di ingredienti da dover confrontare, percentuali di sconto diverse su prodotti uguali offerte da negozi diversi,…)

2. un altro potrebbe insistere sugli "strumenti" utilizzati: per esempio nel caso sia stata individuata la soluzione 5 presentare altri problemi risolubili con lo stesso strumento

3. un altro ancora potrebbe fissare l'attenzione su un obiettivo formativo trasversale come ad esempio la capacità di scelta ponendo un crescendo di questioni del tipo:
   e se avessimo un prodotto finanziario che invece ………… quale ci converrebbe scegliere?
   e se sapessi che al massimo ………………….. Quanto posso sperare di guadagnare, e quanto rischio di perdere?
   e se invece ………………….. per arrivare alla formulazione di un problema inverso e alla proposta della sua soluzione.

Il processo attivato va sostenuto da azioni del docente mirate a facilitare il riconoscimento di differenze ed analogie tra modelli diversi, ad sottolineare i passaggi in cui gli studenti usano logiche di risoluzione dei problemi con procedure inverse, risolvono i problemi integrando il proprio punto di vista attraverso le conoscenze e competenze di altri.
In prospettiva il lavoro può dare luogo ad alcuni possibili approfondimenti e collegamenti, ad esempio:
- il concetto di algoritmo inteso come stesura del processo mentale seguito come successione finita di passi non ambigui
- il foglio elettronico per calcolare semplici formule
- il concetto di errore evidenziando ad esempio come approssimazioni ripetute si propaghino sul valore finale, ottenuto da una successione di operazioni.

6.4 Le funzioni



Nello studio della realtà uno degli aspetti più importanti è quello di stabilire se tra due fenomeni c'è un rapporto di dipendenza e non solo di semplice correlazione: se cioè il verificarsi di un fenomeno è la causa del verificarsi di un altro fenomeno. In tali casi si dice che c'è un rapporto di causa-effetto. Non sempre esiste una relazione tra grandezze che intervengono nella descrizione di un fenomeno. Per esempio, esiste una relazione tra la velocità di una macchina e il consumo dei pneumatici, ma non tra il colore della carrozzeria e la velocità. In questa UD si intende considerare fenomeni di questo tipo, in cui , conosciuto il valore di una variabile si può calcolare il valore dell'altra.

In occasione delle elezioni le ferrovie hanno deciso di concedere uno sconto del 70% ai cittadini che devono recarsi a votare in un altro comune , purché facciano un biglietto di andata e ritorno. Se devo recarmi a votare in un altro comune in cui però intendo restare oltre la data di condizioni di favore mi conviene in qualunque caso fare il biglietto di andata e ritorno a tariffa ridotta pur sapendo che quello di ritorno non lo utilizzerò?

Le soluzioni

Si provano ad elencare di seguito alcune soluzioni del problema proposto senza entrare nei dettagli, evidenziando i concetti matematici, anche in termini di collegamenti utilizzati, delle operazioni mentali eseguite dagli allievi e delle ricadute formative che ne potrebbero derivare se gestite opportunamente dal docente.

Le diverse impostazioni di soluzioni proposte si propongono tra l'altro di utilizzare tutti i modelli di rappresentazione delle funzioni allo scopo di poter commentare nella voce "ruolo del docente" gli aspetti caratterizzanti le differenti modalità che, in una situazione d'apprendimento possono costituire materiale di riflessione per gli allievi.

Viene fornito agli allievi un depliant informativo distribuito dalle ferrovie dello Stato che riporta per alcune pagine dell'orario ferroviario informazioni riguardanti le variazioni dei costi secondo lo sconto previsto.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 1.4 *Confronta, seleziona prezzi, Livello 2.5 Conosce i sottomultipli più comuni delle unità di misura, Livello 4.6 Legge, costruisce tabelle relativi a prezzi, e allo* **Standard C**, Livello 3.11 *Legge orari ferroviari, ricava indicazioni per un percorso.* **Standard D**, Livello 1.6 *Addiziona,sottrae importi in danaro, separando € e centesimi, Livello 2.3 Confronta, ordina seleziona importi, Livello 2.7 Calcola addizioni e sottrazioni con importi in danaro, Livello 4.16 Comprende, analizza, ricava dati da tabelle.* **Standard H**, Livello 2.12 *Interpreta informazioni relativi a biglietti e pedaggi; legge semplici tabelle orarie e chilometriche, Livello 3.18 Legge tabelle di distanza; calcolare tempi di percorrenza, distanze.* **Standard I** Livello 4.9 *Interpreta e valutare dati sintetizzati in tabelle.* **Standard L**, Livello 3.3 *Individua dati significativi da tabelle.* **Standard M** Livello 3.4 *Definisce, raggruppa, sintetizza dati seguendo un modello.*

1^ soluzione

Gli allievi, esaminato il materiale a loro disposizione, decidono di costruire una tabella in cui raccogliere e confrontare i costi, a parità di distanza, per trovare la risposta al quesito. L'esame della tabella porta alla conclusione che il costo del biglietto di andata e ritorno è sempre più vantaggioso; il metodo risolutivo non consente, però, di fornire una risposta di carattere generale.

Lo studente: esamina i dati e individua gli obiettivi del problema? Riconosce le criticità del problema? Si pone domande per cercare di risolvere il problema? Imposta un percorso per uscire dalla problematicità? Individua relazioni tra i dati del problema? Risolve graficamente il problema? Comprende, analizza, ricava dati da un grafico? Riconosce il ruolo delle variabili all'interno della formula? Utilizza strumenti propri della matematica per dare una risposta al problema?

Le tabelle sono di facile costruzione, ma offrono una visione molto parziale del fenomeno sia per il numero, comunque sempre limitato dei casi presi in esame, che per l'impatto visivo scarsamente espressivo. La tabella non consente di afferrare rapidamente e nella sua completezza il fenomeno. D'altra parte occorre sottolineare l'importanza di poter disporre di uno strumento come quello della tabella nel caso di fenomeni il cui studio è possibile solo per via sperimentale. Ad esempio in questo caso, dalla lettura dello stralcio di orario ferroviario a disposizione, possiamo avere solo informazioni sui costi e sull'ora di partenza e arrivo del treno; se si riportano i dati sul piano cartesiano si possono ricavare molte più informazioni: le ore di passaggio nelle stazioni intermedie, i tempi di fermata nelle varie stazioni, le velocità medie nei vari tratti del percorso… Si può comunque stimolare gli allievi ad ampliare il campo di osservazione, cercando l'esistenza di risultati particolari, che se pur non immediatamente evidenti, si possono dedurre da una lettura più attenta e approfondita della tabella: comportamenti di proporzionalità, crescenza, decrescenza, massimi e minimi. In sintesi il docente, per lo sviluppo delle operazioni mentali ipotizzate, dovrà facilitare la lettura di eventi della vita quotidiana attraverso tabelle, esercitare la descrizione delle regole e dei vincoli di un nuovo contesto, evidenziare come i modelli matematici possono essere d'aiuto nelle piccole scelte della vita quotidiana, creare condizioni perché lo studente ricerchi soluzioni generali attraverso osservazioni di casi particolari, studi un problema anche da punti di vista diversi, riesamini il problema alla scoperta di nuovi elementi.

2^ soluzione

Sempre con l'aiuto delle informazioni dedotte dal depliant fornito, si costruisce un sistema di riferimento. Sull'asse delle ascisse si indica la misura delle distanze, mentre sull'asse delle ordinate per ogni distanza si indicano sia il corrispondente costo del biglietto di sola andata che del biglietto di andata e ritorno comprensivo di sconto, arrivando a costruire due distinti grafici cartesiani per punti. Dal loro confronto si ottiene la risposta al problema.

Anche in questo caso, come già notato per la tabella, la conclusione è comunque parziale e costruita sui casi particolari disponibili sul depliant informativo. Occorre guidare il lavoro degli studenti perché il concetto di funzione sia conquistato gradualmente.

La rappresentazione grafica cartesiana si presta meglio per una fotografia del fenomeno in quanto rende immediatamente evidenti proprietà riguardanti:

- il dominio e il condominio della funzione
- l'insieme dei valori in cui la funzione è positiva o negativa
- i valori per cui la funzione si annulla
- comportamento crescente o decrescente (in senso intuitivo)
- il valore massimo e minimo della funzione

- gli intervalli dei valori in cui il fenomeno non subisce variazioni (funzione costante)
- ………..

Per contro, occorre far riflettere sul fatto che i grafici possono portare un osservatore frettoloso a false conclusioni e proprio sulla distrazione contano coloro che vogliono trarre in inganno i destinatari dei loro messaggi. Si vuol far riferimento alla diversa impressione che si riceve quando si utilizzano unità di misura differenti su parti di uno stesso grafico o alle erronee rappresentazioni grafiche che si possono attribuire ad un fenomeno nel caso in cui non si rifletta sui due possibili caratteri che può assumere la variabile indipendente (discreta o continua). Ad esempio, dato il tracciato ospedaliero della temperatura di un paziente (rilevata solo ad ore prefissate, cioè a variabile discreta), non sarebbe possibile avere informazioni sulla temperatura in una qualunque momento della giornata, diversamente da quanto si potrebbe desumere dalla lettura del grafico dello strumento che rileva la temperatura nella sala dei musei (basato su una lettura che si può pensare a variabile continua). Il docente può inoltre porre l'attenzione sull'aspetto riguardante il disegno di un grafico, in particolare si può sottolineare che non in tutti i grafici i punti devono necessariamente essere congiunti tra loro, e introdurre in modo intuitivo il concetto di continuità, senza la pretesa di uno sviluppo rigoroso del concetto, ma solo nel senso di un grafico che non presenta interruzioni di alcun tipo.

3^ soluzione

Assegnata ad x, intesa come costo del solo biglietto d'andata, il ruolo di variabile indipendente e ad y, costo scontato, quello della variabile dipendente, si può scrivere la formula che ne generalizza la dipendenza $y = kx$ e ne verifica la congruenza con i dati forniti dal depliant. La soluzione ha carattere generale.

Lo studente: Distingue tra dati noti e dati incogniti? Opera scelte supportate da certezze teoriche e da convinzione? Comprende e applica il concetto di variabile dipendente e indipendente? Traduce in formula un problema? Collega caratteristiche di fenomeni osservati? Controlla l'esattezza del proprio risultato? Rappresenta una sequenza di operazioni come diagrammi di flusso?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 2.5 Conosce i sottomultipli più comuni delle unità di misura di lunghezza metrico-decimali. **Standard C,** Livello 3.11 Legge orari ferroviari, ricava indicazioni per un percorso. **Standard D**, Livello 2.3 Confronta, ordina, seleziona importi, Livello 2.7 Calcola addizioni e sottrazioni con importi in danaro. **Standard F**, Livello 4.15 Risolvere problemi integrando dati, proprie conoscenze e competenze con altri. **Standard I** Livello 2.4 Applica metodi di controllo del risultato. **Standard L**, Livello 3.3 Distingue tra dati essenziali, accessori, impliciti, espliciti, Livello 4.18 Ragiona evidenziando relazioni. **Standard M**, Livello 3.4 Definisce, raggruppa, sintetizza dati seguendo un modello.

La rappresentazione algebrica della funzione è uno strumento molto potente che consente di ottenere la rappresentazione nelle due forme precedentemente utilizzate, passando, in presenza delle condizioni opportune del dominio, da un grafico per punti ad uno continuo. Disponendo di una rappresentazione algebrica del fenomeno si possono guidare gli studenti nell'osservazione delle proprietà della funzione e nella ricerca dei valori ottenuti al variare della variabile indipendente. Si può poi suggerire di tracciare il relativo grafico cartesiano e confrontarlo con quello ottenuto senza l'utilizzo della rappresentazione algebrica e di insistere sull'indagine delle relazioni tra gli elementi del dominio e il tipo di funzione. Si possono, infine, riproporre esempi in cui la funzione non è rappresentabile con modello algebrico, per radicare la convinzione dell'importanza di poter disporre, pur nei suoi limiti, della rappresentazione tabulare. Il docente inviterà gli studenti a discutere in gruppo i dati del problema e la reale applicabilità della strategia ipotizzata e la natura delle problematiche sottese ad un problema, a ricondurre il problema a esperienze già vissute, ad interpretare grafici descrivendo le proprietà di un fenomeno, ad interpretare formule deducendone proprietà, ad individuare e utilizzare, fra gli oggetti di studio, gli strumenti utili per risolvere problemi.

4^ soluzione

La rappresentazione della funzione segue il modello matematico di automa dove l'incognita x, assegnata in ingresso, diventa in uscita del tipo kx. Anche in questo caso la soluzione ha carattere generale.

Le difficoltà che possono incontrare gli studenti nell'apprendere il concetto di funzione derivano soprattutto dall'operazione di separare la "legge" in quanto tale dai dati numerici in entrata e in uscita. Per questo l'interpretare una funzione come una " macchina che trasforma " ciò che vi si immette è molto utile per chiarire i due aspetti fondamentali per la comprensione:

la scelta dei dati in entrata dipende esclusivamente dall'operatore che li immette;

il meccanismo di funzionamento della macchina è indipendente dal dato immesso.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A. Livello 1.4 *Confronta, seleziona prezzi,* Livello 2.5 *Conosce i sottomultipli più comuni delle unità di misura di lunghezza metrico-decimali.* **Standard D**, Livello 2.3 *Confronta, ordina, seleziona importi,* Livello 2.7 *Calcola addizioni e sottrazioni con importi in danaro,* Livello 4.16 *Comprende, analizza, ricava dati da grafici.* **Standard E** Livello 4.10 *Trasferisce dati da tabelle grafici e viceversa,* Livello 3.14 *Legge posizioni sul piano con coordinate cartesiane.* **Standard H**, Livello 3.8 *Comprende il significato di variabile, dipendente e indipendente da grafici.* **Standard I**, Livello 4.9 *Interpreta e valuta dati sintetizzati in grafici.* Livello 2.4 *Individua l'intervallo minimo e massimo di variazione delle variabili,* Livello 4.8 *Individuare e descrivere regolarità della legge.* **Standard L**, Livello 3.3 *Individua dati significativi da grafici,* Livello 4.18 *Ragiona evidenziando relazioni.* **Standard M** Livello 3.4 *Definisce, raggruppa, sintetizza dati seguendo un modello.*

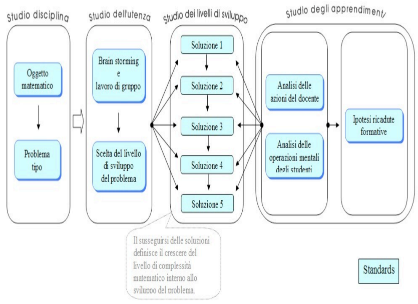
Per ulteriore chiarezza dell'interpretazione, si può provocare la discussione sulla costruzione del relativo diagramma di flusso e, per una sintesi d'apprendimento, favorire la riflessione sul confronto tra i vari modelli di rappresentazione. Sarà compito del docente, quindi, creare le condizioni per confrontare gli aspetti significativi di soluzioni ottenute utilizzando strumenti matematici differenti, controllandone l'esattezza del risultato.

In prospettiva il lavoro può dare luogo ad alcuni possibili approfondimenti e collegamenti, ad esempio: il concetto di funzione ha numerose e variegate possibilità di approfondimento, anche a livello elementare, che rappresentano l'inevitabile sviluppo del tema: successioni, funzione inversa, funzioni che rappresentano proporzionalità diretta e inversa….

Se non si presentano esigenze didattiche specifiche si può scegliere di approfondire gli aspetti che sembrano maggiormente essere d'interesse dell'aula.

Per quanto riguarda i collegamenti si possono individuare, oltre che nell'informatica attraverso l'interpretazione algebrica come automa, in qualunque altra disciplina nel momento in cui utilizzi, situazione fra l'altro molto frequente, esempi di funzioni.

6.5 Rapporti e Proporzioni



A partire dall'uso diffuso nella pratica quotidiana del termine rapporto si tratta di riorganizzare convinzioni, riflessioni, esempi, concetti affrontando un problema nello sviluppo di tre soluzioni attraverso le quali l'analisi del docente prevede operazioni mentali simili a fronte di un utilizzo di oggetti matematici diversi.

Si suppone che una corda per stendere i panni lunga m. 10, si possa allungare di cm. 12. Ammettendo che il rapporto di allungamento sia lo stesso, sarà sufficiente una corda lunga m. 25 se si vuole tendere tra due pali distanti m. 25,60 ?

Le soluzioni

Si provano ad elencare di seguito alcune soluzioni del problema proposto senza entrare nei dettagli, evidenziando i concetti matematici, anche in termini di collegamenti utilizzati, le operazioni mentali eseguite dagli allievi e le ricadute formative che ne potrebbero derivare se gestite opportunamente dal docente. In questa prospettiva si cercano di esaminare le più evidenti operazioni mentali relative ai diversi percorsi risolutivi, nelle intenzioni si vogliono porre le premesse perché attraverso la lettura del comportamento e dei ragionamenti degli allievi l'insegnante possa decidere interventi mirati. Le alternative di soluzioni, pensate nella simulazione come il lavoro di altrettanti gruppi, cercano di seguire un percorso di rigore crescente e di dare un esempio di applicazione dei termini oggetto dello studio: rapporto, espresso nella sua forma simbolica di frazione, e proporzione.

1^ soluzione

Partendo dal presupposto che il rapporto di allungamento è lo stesso , se m10 si allungano di cm. 12, essendo (m 25 = m. 10 + m. 10+ m. 5), allora l'allungamento sarà di cm12 +cm. 12 +cm. 6 = cm. 30, non sufficienti a coprire la differenza di cm .60. La soluzione non ha validità generale.

Lo studente: distingue dati noti da dati incogniti? Esamina i dati e individua gli obiettivi del problema e le relazioni tra i dati del problema? Si pone domande per cercare di risolvere il problema? Applica i concetti di linearità e proprietà di operazioni? Crea corrispondenze tra variabili?

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A, Livello 3.4 *Descrive il rapporto fra due grandezze con frazioni,* Livello 3.7 *Comprende il significato di rapporti, frazioni.* **Standard B,** Livello 2.1 *Conosce le unità di misura di lunghezze metrico-decimali; sceglie l'unità di misura opportuna,* Livello 4.22 *Comprende, calcola indicatori come consumo pro-capite, velocità media.* **Standard C**, Livello 1.1 *Conta, legge, scrive numeri cardinali fino a 1000.* **Standard E**, Livello 2.7 *Conosce il significato intuitivo di rapporto e lo rappresenta con frazioni.*

Il docente può trarre spunto dalla modalità risolutiva utilizzata dagli allievi, per far notare che la scelta delle misure ha agevolato sia l'individuazione del percorso risolutivo, che le fasi operative dell'itinerario, eliminando qualunque difficoltà di calcolo. Poiché nella pratica molto spesso non si ha a che fare con situazioni diciamo "addomesticate" per esigenze didattiche, l'insegnante può suggerire di esaminare quali problematiche potrebbero insorgere in presenza di misure alternative meno "comode" o nei casi particolari in cui una delle due quantità prese in considerazione coincida con zero.

Il docente sottolineerà l'importanza di apprendere il linguaggio, le regole e i vincoli di un nuovo contesto, farà emergere la percezione di come le formule matematiche possono essere d'aiuto nelle piccole scelte della vita quotidiana, invita a ricercare soluzioni generali attraverso osservazioni di casi particolari, ad individuare differenze e analogie in situazioni diverse, a concludere un discorso coerente con un'affermazione di carattere generale, a ridefinire il problema per ampliarne il campo di applicazione.

I due metodi successivi richiedono operazioni mentali molto simili e si differenziano tra loro in modo significativo soprattutto per i concetti matematici utilizzati.

2^ soluzione
Si trasformano i dati in una stessa unità di misura e si determina una nuova grandezza a cui si può dare il nome di indice di allungamento. Questa è ottenuta come rapporto tra l'allungamento e la misura della corda di lunghezza m. 10. Sostenuti dall'ipotesi di linearità e, osservando che l'indice di allungamento gioca il ruolo di fattore di proporzionalità diretta tra lunghezza e rispettivo allungamento, si può determinare di quanto si allunga la corda di m. 25 utilizzando la funzione del tipo $y = kx$, e si può concludere che questa non è sufficiente per congiungere i due pali.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard A. Livello 3.4 *Descrive il rapporto fra due grandezze con frazioni.* **Standard B**, Livello 2.3 *usa una notazione unica per indicare multipli e sottomultipli di unità di misura,* Livello 4.22 *comprende, calcola indicatori come consumo pro-capite, velocità media.* **Standard E,** Livello 2.9 *calcola di quanto una grandezza è maggiore o minore di un'altra.* **Standard F,** Livello 3.*2 Esegue equivalenze fra unità di misura.* **Standard G**, Livello 3.2 *comprende significato e notazione di rapporti e frazioni relative a misure; converte da una notazione all'altra.*

Lo studente: opera scelte supportate da certezze teoriche e da convinzione? Converte dati nella stessa unità di misura? Riconosce una situazione di linearità? Utilizza il rapporto come frazione e gli assegna il significato di una nuova grandezza? Stabilisce relazioni tra variabili? Traduce in formula il problema e sa ricavare il risultato in casi particolari? Formula conclusioni di carattere generale?

3^soluzione

Si trasformano i dati in una stessa unità di misura e poi si risolve il problema con una proporzione che prevede l'utilizzo del quarto proporzionale come elemento incognito.

La seconda e la terza soluzione sono entrambe caratterizzate da rigore risolutivo e da centratura degli obiettivi d'apprendimento previsti dal docente, per cui l'insegnante potrà ampliare l'ambito della ricerca spostando l'attenzione degli allievi su aspetti di carattere più generale, rispetto al concetto di studio, che possono essere di interesse soprattutto per un pubblico adulto più abituato ad affrontare situazioni reali.

Riferimenti agli Standard. Area scientifica, Standard C, Livello 3.4 *Descrive il rapporto fra due grandezze con frazioni.* **Standard B**, Livello 2.3 *Usa una notazione unica per indicare multipli e sottomultipli di unità di misura, Livello 4.22 Comprende, calcola indicatori come consumo pro-capite, velocità media.* **Standard F**, Livello 3.2 *Esegue equivalenze fra unità di misura,* Livello 4.2 Applica proporzioni per risolvere problemi diretti. **Standard G** Livello 3.2 *Comprende significato e notazione di rapporti e frazioni relative a misure; converte da una notazione all'altra.* **Standard H,** Livello 4.4 *Risolve proporzioni,* Livello 4.5 *Applica rapporti e proporzioni per risolvere problemi.* **Standard I**, Livello 3.7 *Applica proporzioni per risolvere situazioni problematiche.*

Lo studente: opera scelte supportate da certezze teoriche e da convinzione? Discute con i propri colleghi di lavoro la natura delle problematiche? Raggruppa, sintetizza dati seguendo un modello? Applica concetti? Traduce in formula il problema? Presenta i risultati usando modalità proprie della matematica?

Occorre evitare che un problema, costruito per esigenze didattiche su modelli "addomesticati", in quanto non si vogliono proporre problemi tanto complessi la cui soluzione richieda una preliminare suddivisione in sottoproblemi, diventi di ostacolo alla creatività e possa suscitare convinzioni errate. Si fa riferimento in questo caso alla supposta linearità ipotizzata nel problema, nella condizione che il rapporto di allungamento sia lo stesso, con verifica di proporzionalità diretta, conseguente al verificarsi che a lunghezza nulla corrisponda allungamento nullo.

Per non ingenerare negli allievi false opinioni sulla validità generale delle condizioni si dovrà stimolare la riflessione degli studenti su problemi che prendano in considerazione anche grandezze come aree e volumi perché possano verificarne il diverso comportamento.[32]

Si può inoltre far notare che molto spesso al fenomeno reale è connessa una complessità che viene omessa nel modello matematico ideale, ad esempio nel problema proposto ci si può chiedere fino a che punto si può ulteriormente allungare la corda senza arrivare alla rottura. La condizione di proporzionalità rappresenta un'idealizzazione del comportamento dei corpi, in quanto nella realtà si viene a determinare un intervallo di incertezza, non presente nel modello matematico, in cui non si può prevedere con esattezza l'evoluzione del fenomeno. È molto importante essere ben chiari su questo aspetto in modo che l'allievo non rimanga sconcertato di fronte a situazioni reali che sembrano non ricalcare rigidamente modelli matematici presentati. Può essere di grande aiuto ai fini della chiarezza l' esempio dell'elasticità dei corpi tratto dalla fisica.

Il docente crea le condizioni per fare collaborare nel gruppo gli studenti, interviene per accrescere la visione d'insieme del problema rispetto alle strade

[32] *Ci si può aiutare con un esempio del tipo: se si considerano due contenitori cilindrici aventi la stessa altezza, ma di diametro di base uno doppio dell'altro in quale rapporto sono le rispettive capacità?*

percorribili, fa discutere nel gruppo i dati del problema e la reale applicabilità della strategia ipotizzata, promuove il richiamo di esperienze già vissute per affrontare nuove situazioni, la lettura dei problemi senza schemi precostituiti. Crea le condizioni per lavorare in gruppo discutendo la validità del proprio ragionamento, distinguendo le differenze tra modello reale e ideale, valutando i vincoli interni in casi diversi (modello reale e ideale), raggruppando, sintetizzando dati seguendo un modello. Fa ricercare esempi di eventi e situazioni in un ambito più vasto per favorire la chiarezza del concetto.

In prospettiva il lavoro può dare luogo ad alcuni possibili approfondimenti e collegamenti, ad esempio si può riflettere sul fatto che stabilire un rapporto vuol dire sostanzialmente stabilire una relazione di equivalenza. L'introduzione di un rapporto determina una relazione tra gli elementi di un insieme (sono in relazione gli elementi che hanno lo stesso rapporto).
Tale relazione è un'equivalenza. Ad esempio, il peso specifico di una sostanza definito come rapporto peso/volume stabilisce la relazione di equivalenza "avere lo stesso peso specifico" e permette di raggruppare le sostanze in classi equivalenti rispetto a questa proprietà fisica.
L'applicazione dei concetti, ampiamente utilizzati nella vita quotidiana, trova esempi in tutti i rami della scienza.

6.6 Note sulle unità didattiche

I percorsi didattici descritti vanno letti in un'ottica di studio, costruiti sulla sedimentazione di numerose e variegate esperienze di insegnamento, tutti i punti nodali della proposta vengono corredati da giustificazioni a supporto delle scelte operate.

Ecco alcuni passaggi che sono stati compiuti nel costruire le diverse unità studiando sia la disciplina che l'utenza potenziale.

L'aritmetica dell'orologio

I contenuti prendono in considerazione ambiti teorici circoscritti ai concetti fondamentali dell'argomento, per favorire nell'avvio dello studio di un nuovo concetto la comprensione degli aspetti basilari.
Tra i problemi stimolo la scelta è caduta su quelli considerati di modesta complessità, nella convinzione che esercizi non complessi ma mirati negli obiettivi possano creare situazioni di interazione allievo/docente favorevoli a risultati di successo nell'apprendimento.
Le soluzioni proposte vanno lette come pretesto per indicare alcune possibili scelte metodologiche in percorsi didattici/formativi, senza pretesa di completezza ed esaustività nei contenuti e nelle scelte operate.
Nella certezza che viene dall'esperienza che la formazione non si costruisca esclusivamente su situazioni ad elevato valore contenutistico, in questo contesto vengono formulate soluzioni del tutto insoddisfacenti da questo punto di vista, per provocare la riflessione sull'eventualità che talvolta esse possano, attraverso un'azione congiunta studente/docente, essere spunto per ricadute formative relativamente alte, se opportunamente calibrate sulle potenzialità dell'allievo.

Per guidare gli studenti in questo percorso di ricerca si sposta l'attenzione dell'aula dall'insieme infinito dei numeri interi , con cui gli studenti si sono abituati ad eseguire i calcoli, su un insieme a loro molto familiare, quello dei numeri dell'orologio. L'intervento didattico si propone un duplice scopo:

- far acquisire dimestichezza con il sistema di misura ad esso connesso, ritenuto prioritario, data la frequenza con cui viene utilizzato nella vita quotidiana,
- condurre gli studenti alla scoperta almeno degli aspetti fondamentali di un particolare ambiente matematico: l'aritmetica del finito, in cui il concetto di "infinito" viene indagato in modo rigoroso attraverso il concetto di "finito", semplificandone il percorso teorico.

Nell'aritmetica dell'orologio si manifesta uno "strano" comportamento dell'operazione di somma. Se, per esempio, sono le dieci di sera e si deve prendere una medicina dopo quattro ore, la somma 10 + 4 = 14, non viene espressa con il numero 14, bensì con 2 e analogamente 10 + 3 = 1 e non 13. Vengono evidenziate analogie riguardanti: i giorni della settimana, i mesi dell'anno, il chilometraggio del contachilometri dell'automobile…, gli insiemi sembrano dipendere da un elemento comune, il numero di ripetizione: 12 per l'orologio, 7 per la settimana, 12 per i mesi dell'anno, 100.000 per il contachilometri.
Per introdurre gli studenti in una situazione concreta si propone quindi il problema descritto nella UUDD. È utile inoltre lasciare spazio alle reazioni

immediate e alle prime considerazioni da cui il docente potrà trarre indicazioni per tarare l'intervento sulle necessità e sulle esperienze pregresse dell'aula; si procede poi con la suddivisione degli allievi secondo la tecnica del gruppo di livello.

Il teorema di Pitagora

L'enunciato del teorema che Pitagora scoprì intorno al 530 a.C. nell'affermare che *la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati più corti di un triangolo rettangolo è uguale all'area del quadrato costruito sul lato più lungo* evidenzia una relazione tra un'area maggiore e due minori. La validità dell'enunciato è avvalorata dalla teoria dell'equivalenza

L'unità didattica potrebbe essere preceduta da qualche considerazione di natura storica relativa allo sviluppo della risoluzione dei problemi, approccio a cui ci si ispira nella impostazione del percorso di proposta di soluzioni.

Non si vuole in alcun modo sminuire l'interpretazione geometrica insita nel teorema stesso, che anzi potrebbe diventare oggetto di studio qualora l'insegnante ad esempio riuscisse a provocare la curiosità intellettuale degli allievi sulle ragioni di funzionamento del teorema e quindi arrivare a proporne la dimostrazione di carattere geometrico.

In questa fase si potrebbero impegnare gli allievi in un'azione di problem solving per indagare sul valore dell'area dei 3 quadrati disposti vertice a vertice intorno al triangolo, a seconda che l'angolo maggiore del triangolo sia ottuso, retto o acuto.

Dopo una prima presentazione dell'argomento probabilmente si verificherà che molti allievi sono già in grado di enunciare il teorema , tuttavia si dovrà svolgere un lavoro preliminare di ricerca e riflessione su aspetti riguardanti la modellizzazione del reale in figure geometriche e in particolare in un triangolo rettangolo. Si potranno proporre problemi di differente natura che stimolino alla simulazione del reale con schemi liberi da vincoli concreti, inessenziali alla risoluzione del problema. Ad esempio: quanto dovrà misurare la scala per poter riprendere un gatto che si trova su un albero all'altezza di 3m, sul ciglio di un fossato largo 1m.? Oppure il problema che viene proposto nella UD.

L'operatore percentuale

Chiarito, dal punto di vista matematico, il significato del termine dell'oggetto che si vuole indagare, il docente può avviare un'attività di brainstorming sul contenuto per una scelta accettata e condivisa dall'aula, dettata anche da criteri di utilità.
Volendo trattare l'argomento "l'operatore percentuale", un confronto iniziale può aiutare a scoprire l'uso diffuso di termini come percentuale, sconti, interessi, sondaggi…; questa tecnica può far emergere l'utilità di poter controllare la realtà attraverso la conoscenza e la padronanza d'uso del concetto matematico nelle sue diverse sfaccettature; un discorso di attualità e di utilizzo frequente come quello della percentuale può creare interesse e appassionare il gruppo di adulti alle prese con i conti di tutti i giorni.
Alla luce di quanto emerso dal brainstorming, il docente progetta una situazione d'apprendimento costruita sulla risoluzione del problema proposto.

Agendo una dinamica di costruzione degli apprendimenti attraverso il lavoro di gruppi risulta particolarmente centrale lo sviluppo della documentazione. In situazione d'apprendimento il docente, per documentare il lavoro svolto, deve fare in modo che le attività effettuate dai soggetti in formazione non siano improvvisate o semplicemente spontanee, ma programmate e con obiettivi precisi che consentano ad esempio all'adulto di scoprire stili di comunicazione, modalità di documentazione, strumenti utilizzati. Il docente può cogliere l'occasione per far acquisire semplici tecniche di rappresentazione (es. tabelle, grafici,…)
I gruppi di lavoro dovranno documentare in forma scritta i risultati raggiunti a livello disciplinare giustificando i passaggi seguiti e gli strumenti matematici utilizzati.
Seguirà un momento di comunicazione a tutta la classe per esporre oltre la soluzione elaborata anche le criticità di carattere disciplinare e relazionale . Gli obiettivi della documentazione possono essere:

- Descrivere l'esperienza in modo da essere compreso dagli altri
- Evidenziare i momenti significativi dell'esperienza sia in termini di difficoltà incontrate che di aiuti ricevuti.
- Trasferire agli altri gruppi la procedura di lavoro perché possano riflettere sulla strategia di soluzione
- Creare occasioni di ulteriore riflessione nel momento di esprimere con chiarezza ad estranei la propria esperienza
- Individuare soluzioni grafiche che risultino efficaci per la comprensione della loro esperienza

Le funzioni

Le funzioni sono gli strumenti matematici più adatti ad esprimere con precisione relazioni di causa-effetto; lo studio delle funzioni ha perciò in tutta la matematica un' importanza fondamentale.

Si comincia con l'enunciare la definizione di funzione matematica come corrispondenza univoca tra due insiemi, che associa ad ogni elemento del primo insieme - che prende il nome di dominio e che rappresenta il campo di variabilità della variabile indipendente x - un solo elemento del secondo insieme - che si chiama condominio e che rappresenta l'ambito di variabilità della variabile dipendente y. La scrittura simbolica di questo modello algebrico è $y = f(x)$.
Sarà importante chiarire che spesso nel parlare comune si usa il termine funzione per indicare una dipendenza tra due grandezze, ma con significato più generale. Per esempio, dire che il costo della vita è funzione dell'inflazione o che il prezzo unitario di un certo articolo è funzione delle leggi del mercato sta a significare che esiste una relazione tra queste grandezze, ma non è detto che sia una funzione nel senso della definizione data.
Stimolati a riportare esempi di funzioni dal quotidiano, gli allievi dimostrano di possedere l'idea del concetto secondo una rappresentazione grafica, facendo riferimento a grafici di:

- registrazione della temperatura di un malato con il passare delle ore
- registrazione della temperatura atmosferica durante il giorno
- variazione del valore di un prodotto finanziario al variare dei giorni

Il tipo di conoscenza del tema dimostrata dagli allievi consente di passare dalla definizione, moderna e impegnativa dal punto di vista dell'apprendimento, che

poggia sul concetto di corrispondenza tra insiemi, alla considerazione dell'aspetto geometrico analitico della funzione, dandone una rappresentazione grafica cartesiana. Tale forma permette di effettuare considerazioni relative alla regolarità, all'andamento e quindi alla formulazione di ipotesi di dipendenza. Si può riflettere anche sull'altra modalità di rappresentazione,quello della tabella di valori della funzione, anche se questa sicuramente risulta meno espressiva.[33]
Accanto all'introduzione algebrica ne può essere data un'altra basata sulla trasformazione che una funzione determina sul valore della variabile indipendente.
Questa introduzione accentua l'aspetto operativo della funzione che è vista come un automa che riceve un valore in ingresso e produce un valore in uscita, che può essere rappresentata graficamente con un diagramma di flusso e che si presta a collegamenti con l'informatica.[34]
Per studiare il concetto viene quindi proposto il problema già descritto.

Rapporti e proporzioni

Assunto il concetto che il rapporto è il confronto di due quantità, la proporzione indica l'uguaglianza di due rapporti e la frazione è il simbolo associato ad un rapporto che ne conserva l'esattezza numerica, si avvia un momento di brainstorming per far emergere esperienze ed eventuali convinzioni distorte sul tema.

Dato l'uso diffuso nella pratica quotidiana soprattutto del termine rapporto, utilizzato in molte e diverse situazioni, e, a seconda dei contesti, con differenti simbolismi, anche se matematicamente equivalenti, si ritiene utile far seguire al brainstorming, prima di proporre il problema stimolo, un momento di lezione per riorganizzare convinzioni, riflessioni, esempi proposti con una classificazione che possa risultare di chiarimento almeno per alcuni aspetti teorici.
Si può cominciare con distinguere tra rapporto di grandezze dello stesso tipo e di tipo diverso e per quanto riguarda il rapporto di grandezze dello stesso tipo, anche aiutati da opportuni esempi, si può proporre una classificazione che illustri almeno i termini: misura, rapporto di scala e percentuale.

Si può inoltre stimolare a ricercare termini di comune utilizzo come velocità media, produttività, consumo pro-capite per arrivare a notare che stabilire un rapporto tra due grandezze comporta spesso la definizione di una nuova grandezza definita con un nome diverso.

[33] *Nella fase introduttiva dell'illustrazione si può utilizzare anche la rappresentazione grafica del diagramma di Venn che ben si presta per la comprensione del significato di corrispondenza univoca.*
[34] *Una funzione può essere anche definita per casi, ad esempio si può considerare un grafico formato da due semirette che hanno in comune un punto; il grafico ha andamento continuo ma non può essere espresso da una sola formula.*

6.7 Analisi del modello prevalente *Progressioni di esercizi-problemi*

Tutte le unità didattiche presentate afferiscono ad un modello prevalente che è stato definito ***Progressioni di esercizi-problemi***.
Il modello è rappresentato nello schema posto di seguito.
Lo schema propone un modello di unità didattica che si articola in quattro ambiti essenziali:
Lo studio della disciplina, che riguarda le scelte del docente in merito al tema, oggetto di studio, e al problema stimolo ad esso afferente su cui costruire una situazione d'apprendimento.
Lo studio dell'utenza, che si configura come analisi attuata dal docente, del livello cognitivo ed esperienziale degli allievi, per operare scelte di problemi aderenti alla realtà dell'aula e organizzare l'attività della classe per gruppi di livello di conoscenza.
Lo studio dei livelli di sviluppo, che descrive le conclusioni del lavoro di altrettanti gruppi di allievi. Il susseguirsi delle soluzioni definisce il crescere del grado di complessità interno allo sviluppo del problema.
Lo studio degli apprendimenti, che raccoglie per ogni soluzione proposta: alcune possibili operazioni mentali dell'allievo, attraverso cui il lettore viene accompagnato al collegamento con gli standard dell'area scientifica, l'analisi delle azioni del docente che possono essere d'aiuto per l'apprendimento, le ipotesi di ricadute formative favorite dall'azione congiunta allievo/docente.

Le unità didattiche a cui il modello fa riferimento sono descritte attraverso il problema stimolo con l'analisi dello studio dei livelli di sviluppo e degli apprendimenti potenziali. Seguono le riflessioni relative agli studi della disciplina e dell'utenza che hanno orientato la scelta delle diverse unità didattiche.